ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΉΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω µια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα

διάστηµα ∆.

α. Να αποδείξετε ότι αν f ΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σηµείο

x του ∆, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το

διάστηµα ∆.

Μονάδες 8

β. Αν f ΄(x) < 0 σε κάθε εσωτερικό σηµείο x του ∆, τι

συµπεραίνετε για τη µονοτονία της συνάρτησης f ;

Μονάδες 4,5

Β1.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν

γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη, Σωστό ή

Λάθος δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί σε κάθε

πρόταση.

α. Η συνάρτηση f(x) = e1- x είναι γνησίως αύξουσα στο

σύνολο των πραγµατικών αριθµών.

Μονάδες 2,5

1

β. Η συνάρτηση f µε f '(x) = - 2ηµx+

+ 3, όπου

ηµ

x

2

⎡

⎣

π

x∈ ,

π) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστηµα αυτό.

⎢

2

Μονάδες 2,5

image2

γ. Α ν f΄(x) = g'(x) + 3 για κάθε x∈A, τότε η

συνάρτηση

h(x)=f(x)-g(x)

είναι

γνησίως

φθίνουσα στο ∆.

Μονάδες 2,5

Β.2. Στο παρακάτω σχήµα δίνεται η γραφική παράσταση της

παραγώγου µιας συνάρτησης f στο διάστηµα [-2,6].

Να προσδιορίσετε τα διαστήµατα στα οποία η συνάρτηση

f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

2

α. Αν z , z είναι οι ρίζες της εξίσωσης z + 2z + 2 = 0, να

1

2

αποδείξετε ότι z120 − z220 = 0.

Μονάδες 12

β. Αν z1 είναι ρίζα της εξίσωσης του α. ερωτήµατος, µε

φανταστικό µέρος θετικό αριθµό, να βρείτε τις τιµές του

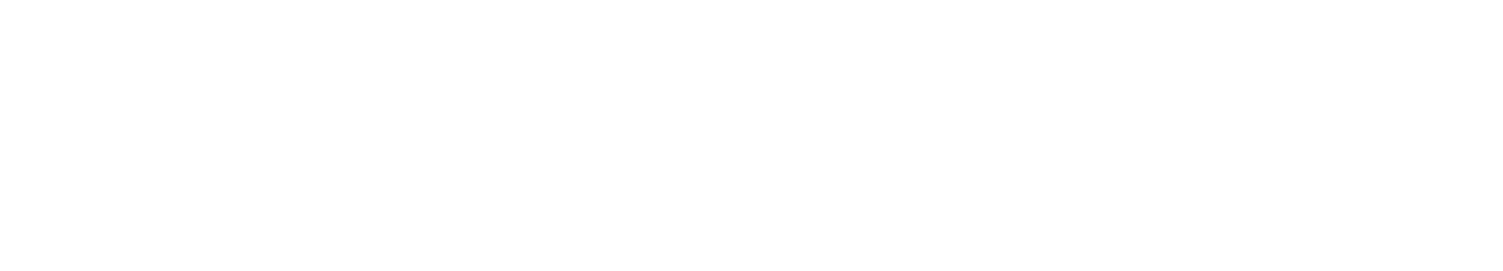
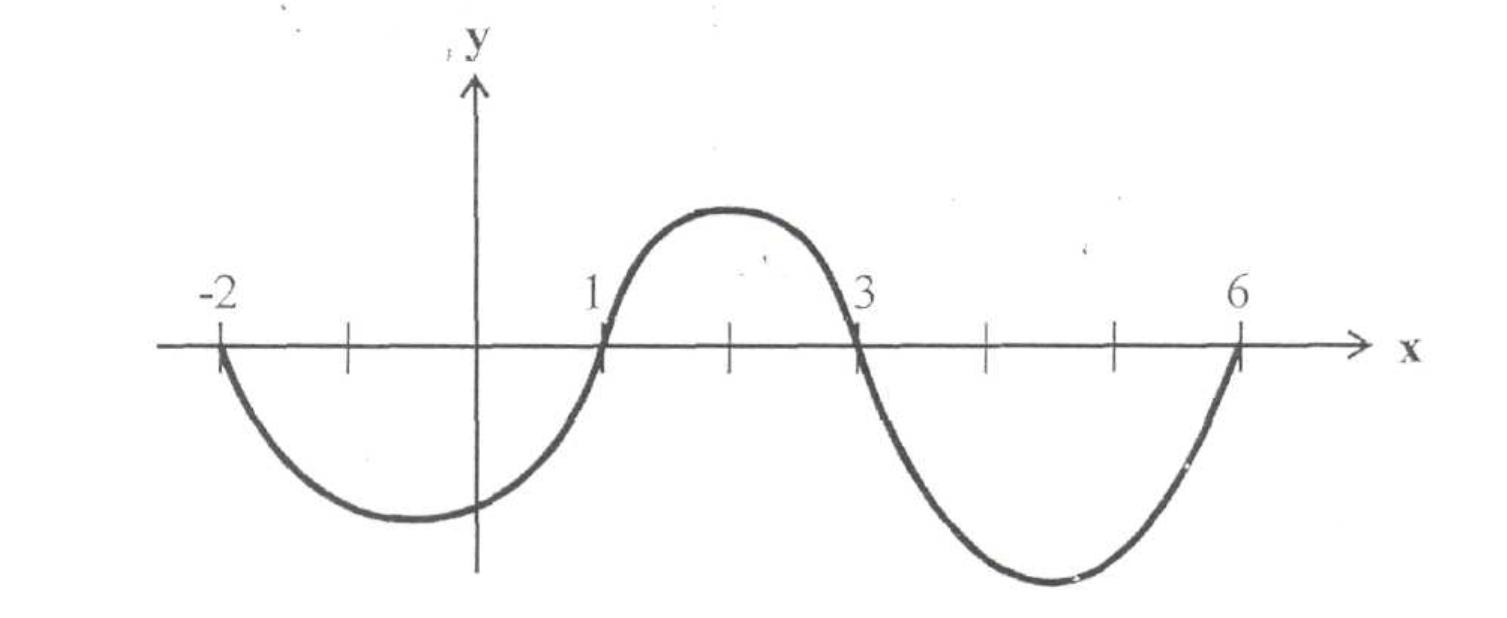
θετικού ακεραίου ν για τις οποίες z1

v

είναι

πραγµατικός αριθµός.

Μονάδες 8



γ. Να βρείτε τον πίνακα της συµµετρίας µε την οποία µπορεί να

προκύψει από την εικόνα της ρίζας z η εικόνα της ρίζας z .

1

2

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

ίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των

∆

πραγµατικών αριθµών, για την οποία ισχύει:

f (x) − e2x +1

lim

= 5

ηµ2x

x→0

α. Να βρείτε το f(0).

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιµη στο

σηµείο xο= 0.

Μονάδες 9

-

x

γ. Αν h(x)= e f(x), να δείξετε ότι οι εφαπτόµενες των

γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα

σηµεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιµή Ρ (σε χιλιάδες δραχµές) ενός προϊόντος, t µήνες

µετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον

t − 6

τύπο P(t) = 4 +

2

5

t

2

+

4



α. Να βρείτε την τιµή του προϊόντος τη στιγµή της εισαγωγής

του στην αγορά.

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το χρονικό διάστηµα, στο οποίο η τιµή του

προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη. χρονική στιγµή κατά την οποία η τιµή του

προϊόντος γίνεται µέγιστη.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η τιµή του προϊόντος µετά από κάποια

χρονική στιγµή συνεχώς µειώνεται, χωρίς όµως να µπορεί

να γίνει µικρότερη από την τιµή του προϊόντος τη στιγµή της

εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 5



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΖΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. ∆ίνονται οι µιγαδικοί αριθµοί z , z .

1

2

Να αποδείξετε ότι:

z ⋅z = z ⋅z

2

1

2

1

Μονάδες 5

Α.2. Αν z = ρ (συνθ + iηµθ ) και z = ρ (συνθ + iηµθ )

1

1

1

1

2

2

2

2

δυο µιγαδικοί αριθµοί σε τριγωνοµετρική µορφή, να

γράψετε τα γράµµατα της Στήλης Α και δίπλα σε

κάθε γράµµα τον αριθµό της Στήλης Β έτσι, ώστε να

προκύπτει ισότητα:

Στήλη Α

Στήλη Β

α.

z1

z2

1.

ρ ρ ⎡ηµ(θ + θ )+ συν(θ + θ )⎤

i

⎣

⎦

2

1

2

1

2

1

2

.

i

ρν ⎡συν(νθ )+ ηµ(νθ )⎤

1 1 1

⎣

⎦

β. z1·z

2

3.

ρ

⎡

i

συν(θ + θ )+ ηµ(θ − θ )

⎤

1 2 1 2

1

⎣

⎦

ρ2

ρ

4

.

⎡

i

συν(θ − θ )+ ηµ(θ − θ )⎤

1 2 1 2

1

⎣

⎦

ρ2

γ.

ν

1

5.

i

ρ ρ ⎡συν(θ + θ )+ ηµ(θ + θ )⎤

1 2 1 2 1 2

z

⎣

⎦

6

,

i

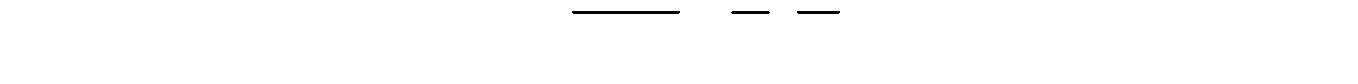
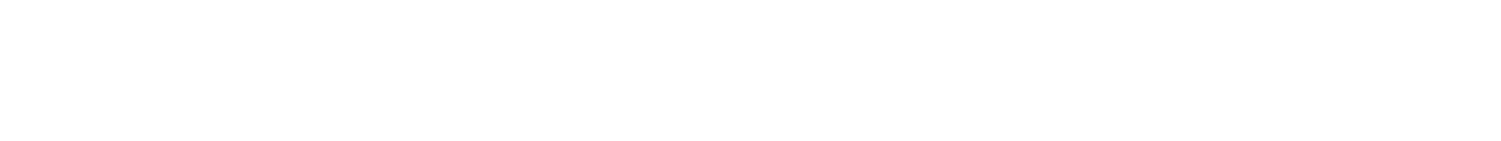
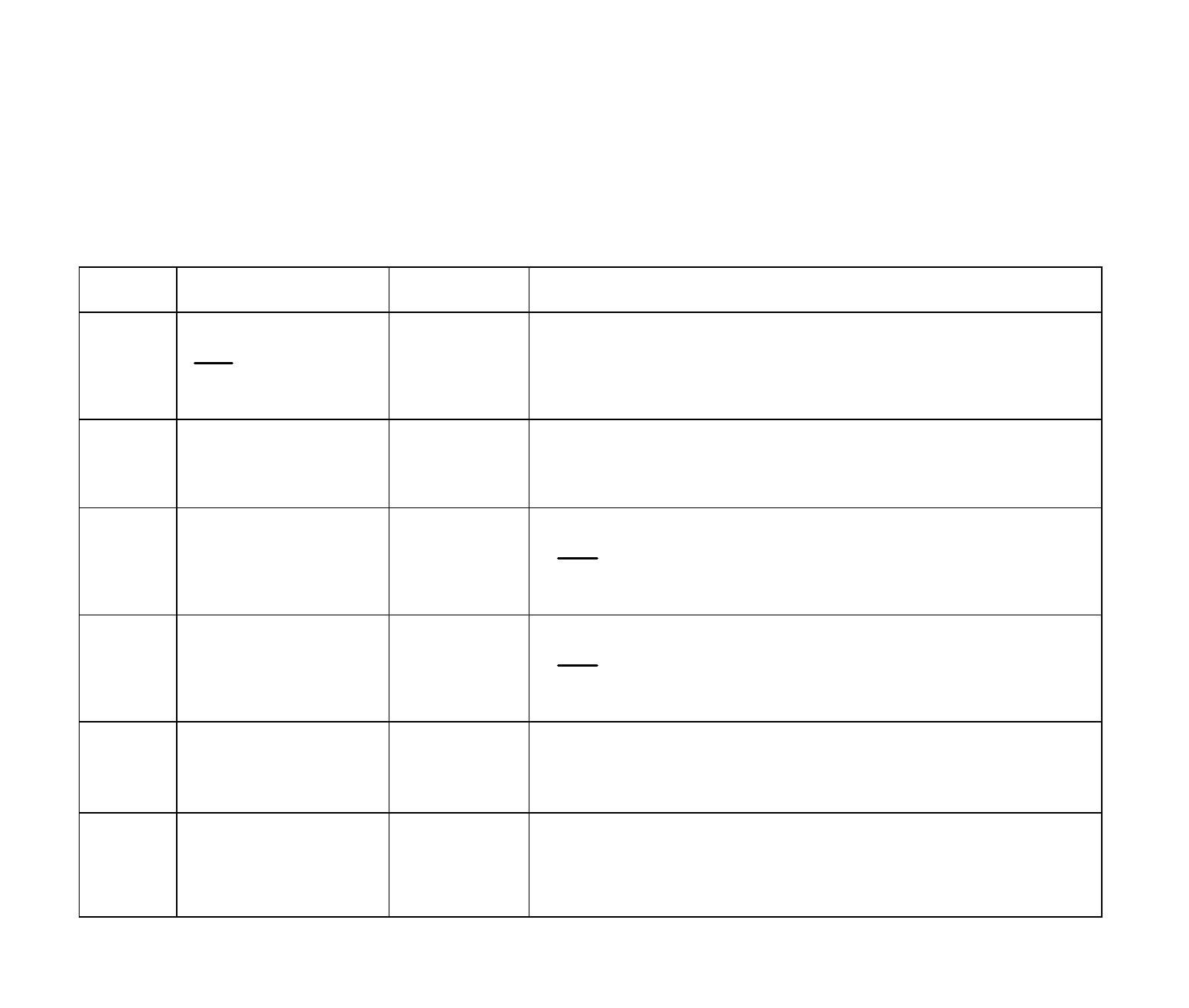
ρν ⎡ηµ(νθ )− συν(νθ )⎤

1 1 1

⎣

⎦

Μονάδες 7,5

image28

B.1. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράµµα που

αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

∆

ίνονται οι µιγαδικοί αριθµοί:

⎛

2π

2π ⎞

5π

5π

z = 2 συν

+ iηµ

και z2 = συν + iηµ

⎜

⎟

1

⎝

3

3 ⎠

3

3

z1

z2

Τότε το πηλίκο

είναι ίσο µε:

Α: 2 Β: 2i

Γ: -2 ∆: -2i

Ε: 2(1- i)

Μονάδες4,5

Β.2. ∆ίνεται ο µιγαδικός αριθµός z = 1 + i. Να

1

6

υπολογίσετε το z .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Θεωρούµε τον πίνακα Α διάστασης

2

×

(κ - 2κ - 1)

(κ + 2λ - 3 ) και τον πίνακα Β

διάστασης (λ + 1) × (3κ - κ + 2), όπου κ και λ

2

θετικοί ακέραιοι.

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το

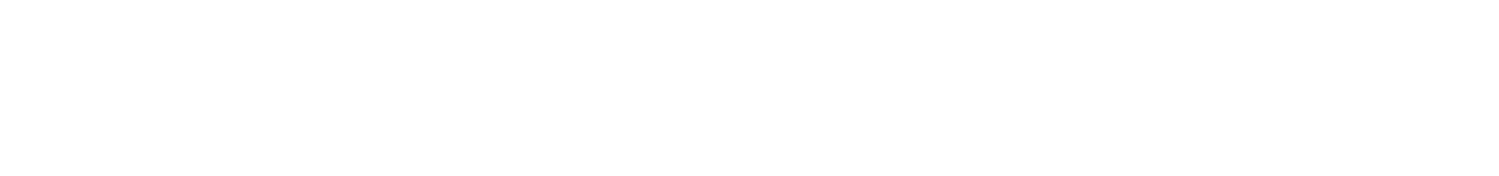
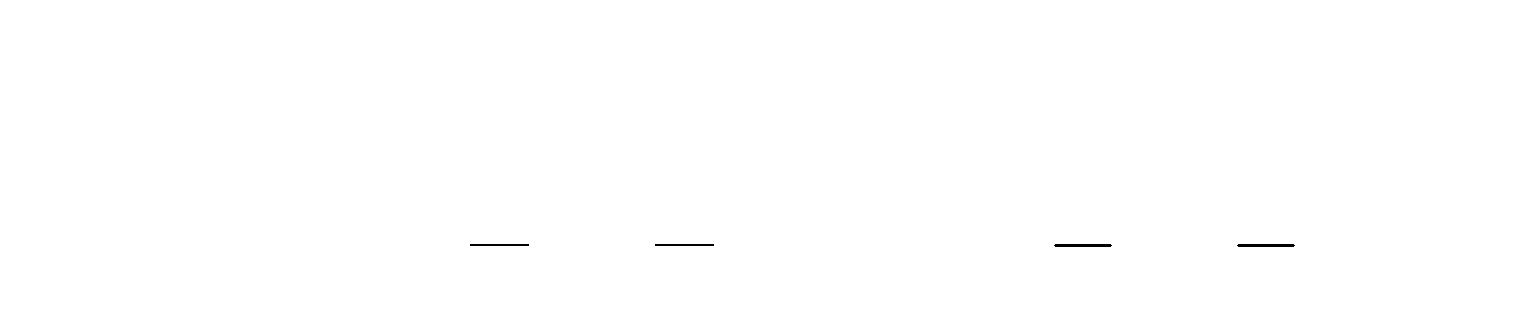
γινόµενο Α · Β

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τις τιµές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων Α

και Β, για να ορίζονται τα γινόµενα Α ·Β και Β · Α

Μονάδες 10



⎡

0 −1⎤

Β. ∆ίνεται, ο πίνακας A =

. Να αποδείξετε ότι:

⎢

⎥

1

0

⎣

⎦

2

×

α. Α = - Ι, όπου Ι ο µοναδιαίος 2 2 πίνακας.

Μονάδες 4

β. 2Α2004 + Α2001 + Α1999 = 2 Ι, όπου Ι ο µοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

ίνεται η συνάρτηση f µε τύπο f(x) =

όπου α πραγµατικός αριθµός.

x

2

− 3x + 2

x − α

∆

,

α. Να βρείτε την τιµή του πραγµατικού αριθµού α, ώστε η συνάρτηση f

να έχει κατακόρυφη ασύµπτωτη την ευθεία x = 4.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την τιµή του πραγµατικού αριθµού α, ώστε η εφαπτοµένη

της γραφικής παράστασης της f στο σηµείο Μ(1,0) να διέρχεται

από το σηµείο Α(-2,3).

Μονάδες 10

γ. Αν α > 2, να δείξετε ότι υπάρχει αριθµός x0 ∈ (1,2) τέτοιος, ώστε η

εφαπτοµένη της γραφικής παράστασης της f στο σηµείο µε

τετµηµένη x0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

Μονάδες 10

image39image40image41

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα διαγωνισµό ενός Οργανισµού για την πρόσληψη προσωπικού,

συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψήφιων. Κάθε γραπτό διορθώνεται

από δυο διαφορετικούς βαθµολογητές. Κάθε βαθµολογητής διορθώνει

4

φακέλους των 25 γραπτών την ηµέρα. Για τη διόρθωση κάθε

γραπτού ο βαθµολογητής αµείβεται µε 200 δραχµές. Τη διόρθωση

συντονίζουν δυο επόπτες που αµείβονται µε 4.000 δραχµές την ηµέρα.

Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθµολογητής

παίρνει επί πλέον ως επίδοµα 10.000 δραχµές ανεξάρτητα από τον

αριθµό των ηµερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες

δραχµές για τη διόρθωση όλων των γραπτών,

δίνεται από τη συνάρτηση:

Κ(x) =10 x + + 40⎞

⎛

⎝

16

x

⎜

⎟

⎠

όπου x ο αριθµός των βαθµολογητών που

απασχολούνται.

Μονάδες 13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθµολογητές, ώστε το κόστος της

διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

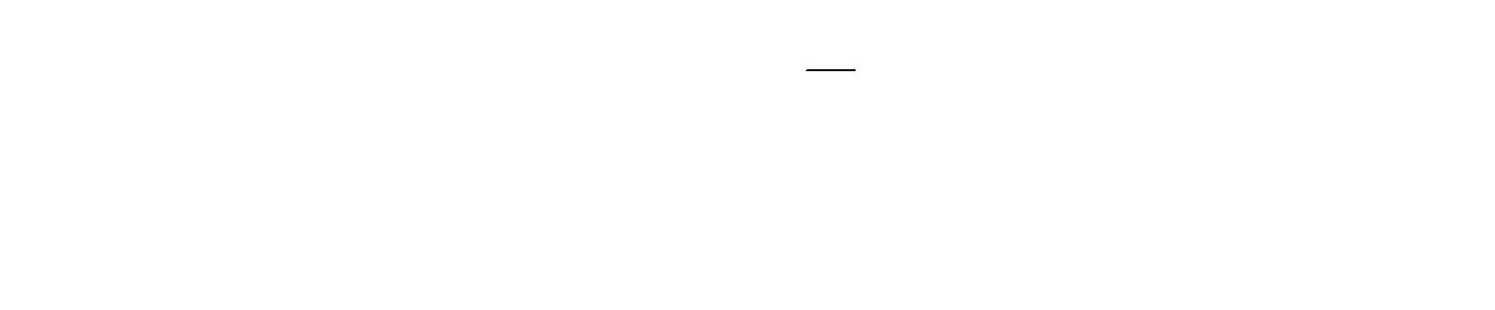
Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του β. ερωτήµατος και τον αριθµό των

ηµερών που απασχολήθηκαν οι βαθµολογητές για τη διόρθωση

των γραπτών.

Μονάδες 4



EΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1o**

**A.1.** ΄Εστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

∙

όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

G(x)=F(x)+C, CÎ ΙR

είναι παράγουσες της f στο Δ και

∙

κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη

μορφή:

G(x)=F(x)+C, CÎ ΙR

Μονάδες 6,5

**Α.2.** Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω

σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του

ορισμένου ολοκληρώματος.

β

ò λf (x)dx =

**α.**

.....

α

β

ò f (x) g(x) dx

(

+

) = .....

**β.**

α

β

ò [λf (x) + μg(x)] dx =

**γ.**

.....

α

όπου λ,μÎ ΙR και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Μονάδες 6

image49

**Β.1.** Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει

f΄΄(x)=6x+4, xÎ ΙR και η γραφική της παράσταση στο

σημείο της Α(0,3) έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

**Β.2.** Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

1

α.

β.

γ.

ex + x dx

0

4

Μονάδες 2

Μονάδες 2

3

x2

dx

x

1

π

2

(2ημx + 3συνx) dx

0

Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

**α.**

**β.**

**γ.**

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των

μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

z+16 = 4z+1

Μονάδες 9

Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των

μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

z­ 1 = z­ i

Μονάδες 9

Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς

που

επαληθεύουν

συγχρόνως

τις

σχέσεις

των

ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

image50image51image52image53image54image55image56image57image58image59image60image61image62image63image64image65

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση

x + α,

(1­ e­ x+1)ln(x ­ 1),

x £ 1

x Î (1,2]

ì

î

f (x) =

í

όπου αÎ ΙR..

**α.** Να υπολογίσετε το όριο

­ e­

x+1

1

lim

x® 1

x ­ 1

Μονάδες 7

**β.** Να βρείτε το αÎ ΙR ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής

στο xo=1.

Μονάδες 11

**γ.** Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξÎ (1,2)

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης

της f στο Α(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα

x΄x.

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για

την οποία ισχύει:

x

1

t f(t)

x2

f (x) = +

dt με x > 0

x

1

**α.** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞).

Μονάδες 3

**β.** Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

1

+ln x

f (x) =

, x > 0

x

Μονάδες 7

Μονάδες 6

**γ.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

image66image67image68image69image70

**δ.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης

της f.

Μονάδες 4

**ε.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που

περικλείεται από τη γραφική παράσταση της

συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

EΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

∆

ΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1o

A.

Αν z = ρ (συνθ + iηµθ ) και z = ρ (συνθ + iηµθ ) είναι δύο

1 1 1 1 2 2 2 2

µιγαδικοί σε τριγωνοµετρική µορφή, τότε να αποδείξετε ότι:

z ⋅z = ρ ρ [συν(θ +θ ) + iηµ(θ +θ )].

1

2

1

2

1

2

1

2

Μονάδες 15

Β.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

β

∫

α. Αν

f (x)dx ≥ 0 , τότε κατ’ ανάγκη θα είναι f(x) ≥0

α

για κάθε x∈[α,β].

Μονάδες 2

β. Η εικόνα f(∆) ενός διαστήµατος ∆ µέσω µιας

συνεχούς και µη σταθερής συνάρτησης f είναι

διάστηµα.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιµη στο IR.και δεν

είναι αντιστρέψιµη, τότε υπάρχει κλειστό διάστηµα

[

α,β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του

θεωρήµατος Rolle.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image71image72

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

δ. Έστω συνάρτηση f ορισµένη και παραγωγίσιµη στο

διάστηµα [α,β] και σηµείο x0∈[α,β] στο οποίο η f

παρουσιάζει τοπικό µέγιστο. Tότε πάντα ισχύει ότι

f΄(x0)=0.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστηµα [α,β]

και υπάρχει x ∈(α, β) τέτοιο ώστε f(x )=0, τότε κατ’

0

0

ανάγκη θα ισχύει f(α)⋅f(β)<0.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

ex −1

ex + 1

∆

ίνεται η συνάρτηση f (x) =

, x∈ IR.

α.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την

αντίστροφη συνάρτηση f .

−

1

Μονάδες 10

−

1

β.

γ.

Να δείξετε ότι η εξίσωση f

ρίζα το µηδέν.

(x) = 0 έχει µοναδική

Μονάδες 5

1

2

−

1

∫

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωµα

f (x) dx

1

2

−

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image73image74image75image76

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

∆

ίνεται η συνάρτηση f, ορισµένη στο ΙR., µε τύπο

2

2

x z

x + z

f(x) =

2

x2 + z

όπου z συγκεκριµένος µιγαδικός αριθµός z=α+βi, α,β∈ΙR,

µ ε α ≠ 0 .

α. Να βρείτε τα όρια lim f (x) , lim f (x) .

x→+∞

x→−∞

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν

z + 1 > z − 1 .

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιµών και το πλήθος των ριζών της f.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f, ορισµένη στο ΙR.µε δεύτερη συνεχή

παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

f΄΄(x)f(x) + (f΄(x ))2 = f(x)f΄(x) , x∈ΙR.

και f(0) = 2f΄(0) = 1.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση µε πεδίο ορισµού και

σύνολο τιµών το διάστηµα [0,1], να δείξετε ότι η

εξίσωση

x

g(t )

∫

2

x −

dt = 1

1+

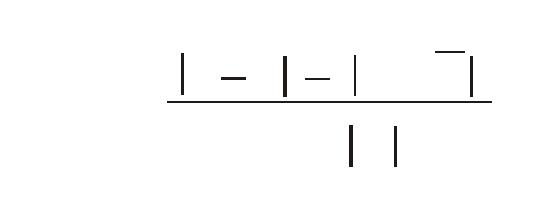
f 2(t)

0

έχει µία µοναδική λύση στο διάστηµα [0,1].

Μονάδες 13

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image77image78image80image81image82image83image84

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1o

A.

Έστω f µια συνάρτηση ορισµένη σε ένα διάστηµα ∆.

Αν F είναι µία παράγουσα της f στο ∆, να αποδείξετε

ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της µορφής

G(x) = F(x) + c , c ∈ ΙR

είναι παράγουσες της f στο ∆ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο ∆ παίρνει τη

µορφή

G(x) = F(x) + c , c ∈ ΙR .

Μονάδες 10

Β.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z1, z2 είναι µιγαδικοί αριθµοί, τότε ισχύει

πάντα

z − z ≤ z + z ≤ z + z

.

1

2

1

2

1

2

Μονάδες 2

β. Έστω µία συνάρτηση f παραγωγίσιµη σ' ένα

διάστηµα (α, β), µε εξαίρεση ίσως ένα σηµείο του

x0, στο οποίο όµως η f είναι συνεχής.

Αν f ΄ (x) > 0 στο (α, x0) και f ΄ (x) < 0 στο

(x , β), τότε το f (x ) είναι τοπικό ελάχιστο της f .

0

0

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image85image86

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

γ. Μία συνάρτηση f : Α → ΙR είναι συνάρτηση 1−1 ,

αν και µόνο αν για οποιαδήποτε x , x ∈ A ισχύει

1

2

η συνεπαγωγή:

αν x = x , τότε f(x ) = f(x ) .

1

2

1

2

Μονάδες 2

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις µε συνεχή πρώτη

παράγωγο, τότε ισχύει:

∫

∫

f(x)⋅ g ΄ (x) dx = f(x) g(x) − f ΄ (x) g(x) dx .

Μονάδες 2

Γ.

Πότε µία ευθεία x = x0 λέγεται κατακόρυφη ασύµπτωτη

της γραφικής παράστασης µιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωµετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων

των µιγαδικών αριθµών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

z = 2 και Ιm (z) ≥ 0 .

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του µιγαδικού αριθµού z

κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του µιγαδικού

1

2

⎛ 4⎞

⎝ z⎠

αριθµού w = ⎜z + ⎟ κινείται σε ευθύγραµµο τµήµα

το οποίο βρίσκεται στον άξονα x΄x .

Μονάδες 13

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image88image89image91

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

∆

ίνεται η συνάρτηση f(x)

=

2 + − .

x 1 x

α. Να αποδείξετε ότι lim f(x) = 0 .

x → + ∞

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύµπτωτη της γραφικής

παράστασης της f, όταν το x τείνει στο − ∞ .

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι f ΄ (x) x 1 f(x) 0 .

⋅

2 + +

=

Μονάδες 6

1

1

dx = ln ( 2 + 1) .

∫0

δ. Να αποδείξετε ότι

2 +

x 1

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

∆

ίνεται µια συνάρτηση f ορισµένη στο IR µε συνεχή πρώτη

παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

f(x) = − f(2 − x) και f ΄(x) ≠ 0 για κάθε x ∈ IR.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως µονότονη .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει µοναδική

ρίζα.

Μονάδες 8

f(x)

γ. Έστω η συνάρτηση g(x) =

.

f ΄ (x)

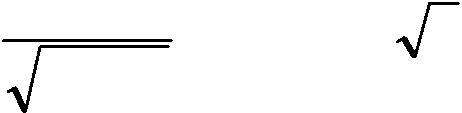
Να αποδείξετε ότι η εφαπτοµένη της γραφικής

παράστασης της g στο σηµείο στο οποίο αυτή τέµνει τον

άξονα x΄x, σχηµατίζει µε αυτόν γωνία 45ο .

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image92image93image97

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόµενους)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε µόνο τα προκαταρκτικά

(ηµεροµηνία, κατεύθυνση, εξεταζόµενο µάθηµα). Τα

θέµατα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοµατεπώνυµό σας στο πάνω µέρος των

φωτοαντιγράφων αµέσως µόλις σας παραδοθούν.

∆

εν επιτρέπεται να γράψετε καµιά άλλη σηµείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε µαζί µε το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέµατα.

. Κάθε απάντηση επιστηµονικά τεκµηριωµένη είναι

αποδεκτή.

5

6

. ∆ιάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες µετά τη διανοµή των

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά τη 10.00η πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image98image99

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

∆

ΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1o

A.

Έστω µια συνάρτηση f ορισµένη σε ένα διάστηµα ∆. Αν

•

•

η f είναι συνεχής στο ∆ και

f΄(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σηµείο x του ∆,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το

διάστηµα ∆.

Μονάδες 9

Β.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν µία συνάρτηση f είναι συνεχής σ’ ένα σηµείο x0

του πεδίου ορισµού της, τότε είναι και

παραγωγίσιµη στο σηµείο αυτό.

Μονάδες 2

β. Το µέτρο της διαφοράς δύο µιγαδικών είναι ίσο µε

την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις µε πεδίο ορισµούIR

και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές

οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image100image101

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

δ. Οι γραφικές παραστάσεις

C

και C΄ των

συναρτήσεων f και f–1 είναι συµµετρικές ως προς

την ευθεία y = x που διχοτοµεί τις γωνίες xOy και

x΄Oy΄.

Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x0, τότε

lim k f(x) = lim f(x) , εφόσον f(x) ≥ 0 κοντά στο

k

x → x

x → x

0

0

x0, µε k∈ΙΝ και k ≥ 2.

Μονάδες 2

Γ.

Να ορίσετε πότε λέµε ότι µια συνάρτηση f είναι συνεχής

σε ένα ανοικτό διάστηµα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό

διάστηµα [α, β].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούµε τη συνάρτηση f: IR →IR µε f(x) = 2 + m – 4 – 5 ,

x

x

x

x

όπου m∈IR, m > 0.

α. Να βρείτε τον m ώστε f(x) ≥ 0 για κάθε x ∈IR.

Μονάδες 13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εµβαδόν του χωρίου που

περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον

άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

ίνεται µια συνάρτηση f: [α, β] →IR συνεχής στο διάστηµα

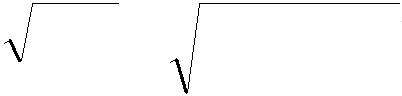
α, β] µε f(x) ≠ 0 για κάθε x∈[α, β] και µιγαδικός αριθµός z

∆

[

µε Re(z) ≠ 0, Ιm(z) ≠ 0 και Re(z) >Im(z).

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image102image103

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

1

z

1

z2

2

= f2(β), να αποδείξετε ότι:

Αν z + = f(α) και z +

α. z= 1

Μονάδες 11

2

2

β. f (β) < f (α)

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση x3f(α) + f(β) = 0 έχει τουλάχιστον µία ρίζα

στο διάστηµα (–1, 1).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0, +∞) → IR τέτοια, ώστε

x2

1

∫

f(x) =

+ 2 2xf(2xt) dt .

2

0

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιµη στο (0, +∞).

Μονάδες 7

β.

Να αποδείξετε ότι f(x) = ex – (x + 1).

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει µοναδική ρίζα στο [0, +∞).

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια lim f(x) και lim f(x) .

x → + ∞

x → – ∞

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image105image106image107image108image109image110

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζοµένους)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε µόνο τα προκαταρκτικά

(ηµεροµηνία, κατεύθυνση, εξεταζόµενο µάθηµα). Να µην

αντιγράψετε τα θέµατα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοµατεπώνυµό σας στο πάνω µέρος των

φωτοαντιγράφων, αµέσως µόλις σας παραδοθούν. Καµιά

άλλη σηµείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε µαζί µε το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα

καταστραφούν µετά το πέρας της εξέτασης.

3

4

5

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέµατα.

. Κάθε λύση επιστηµονικά τεκµηριωµένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες µετά τη διανοµή των

φωτοαντιγράφων.

6

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image111image112

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1o

A.1 Έστω η συνάρτηση f με f(x) = x . Να αποδείξετε ότι η

f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει:

1

f΄(x) =

.

2

x

Μονάδες 9

Μονάδες 4

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f:A →IR λέγεται “1-1”;

B.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος ∆, στα

οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της

είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο

διάστημα ∆.

Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα

διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του xo.

Αν η f είναι κυρτή στο (α,x ) και κοίλη στο (x ,β) ή

o

o

αντιστρόφως, τότε το σημείο Α (x , f(x )) είναι

o

o

υποχρεωτικά

σημείο

καμπής

της

γραφικής

παράστασης της f.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image113image114image115image116

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών

είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof,

τότε είναι υποχρεωτικά fog ≠ gof.

Μονάδες 2

−

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών z,z

είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα

∆

και λ ∈IR\*,τότε ισχύει:

∫λf(x)dx = λ∫

f(x)dx .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z , z είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

1

2

−

z +z =4+4i και 2z − z = 5 + 5i ,

1

2

2

1

να βρείτε τους z , z .

1

2

Μονάδες 10

β. Aν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν

z – 1 – 3i⏐ ≤ 2 και ⏐w – 3 – i⏐ ≤ 2 :

⏐

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί

z, w έτσι, ώστε z=w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του ⏐z – w⏐.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image117image118image119image120

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

ίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στοIR

∆

με f΄(x)≠0 για κάθε x ∈IR.

α. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.

Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση Cf της f διέρχεται από τα

σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1),

να λύσετε την εξίσωση f−1 (− 2004+ f(x

− 8))= −2 .

2

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της Cf,

στο οποίο η εφαπτομένη της Cf είναι κάθετη στην ευθεία

1

(ε): y = −

x+ 2005 .

6

68

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

∆

ίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR→IR,για την οποία ισχύει

f(x) − x

lim

= 2005 .

x

2

x→0

α. Να δείξετε ότι:

i. f(0)=0

Μονάδες 4

Μονάδες 4

ii. f΄(0)=1.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image121image122image123image124

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

x

2

+ λ(f(x))

2

β. Να βρείτε το λ ∈IR έτσι, ώστε: lim

= 3.

2

2

x

2

+ (f(x))

x→0

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή

παράγωγο στοIR και f΄(x)>f(x) για κάθε x ∈IR,

να δείξετε ότι:

i.

xf(x)>0 για κάθε x≠0.

Μονάδες 6

Μονάδες 4

1

∫

f(x)dx < f (1) .

ii.

0

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να

μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος

των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα

καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

3

4

5

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image125image126image127

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1o

A.1 Να αποδείξετε ότι: (συνx)΄=–ημx, x∈IR .

Μονάδες 10

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα ∆. Τι

ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο ∆;

Μονάδες 5

B.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν z , z είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

1

2

z – z ≤ z + z .

1

2

1

2

Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο xo

f

και g(xo)≠0, τότε η συνάρτηση

xo και ισχύει:

είναι παραγωγίσιμη στο

g

⎛

f

g

⎞ ΄

f(x ) g΄ (x ) – f΄ (x ) g(x )

.

⎜

⎟

(xo)

=

o

o

o

o

[g(xo)]

⎝

⎠

2

Μονάδες 2

Μονάδες 2

1

x

γ. Για κάθε x≠0 ισχύει [lnx]΄ =

.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image128image130image131image132image133

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

δ. Μια συνάρτηση f:Α → IR είναι 1–1, αν και μόνο αν

για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η

εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα

[

α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β],

β

τότε ∫ f(t)dt = G(α) – G(β).

α

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση f(x) =

1

+ ex

+ ex+1

∆

, x∈IR .

1

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της

στοIR.

Μονάδες 9

1

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα ∫

dx .

f(x)

Μονάδες 9

Μονάδες 7

γ. Για κάθε x<0 να αποδείξετε ότι:

x

x

x

x

f(5 )+f(7 )<f(6 )+f(8 ) .

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα

1

0

10

2

∈

(4–z) = z και η συνάρτηση f με τύπο f(x) = x +x+α, αIR .

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν

στην ευθεία x=2.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image134image135image136

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2

τέμνει τον άξονα y΄y στο yo=–3, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που

περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και

3

της ευθείας x = .

5

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

∆

ίνεται η συνάρτηση f(x) = xln(x +1) – (x +1)lnx με x>0.

1

x

α. i. Να αποδείξετε ότι: ln(x+1) –lnx <

, x > 0 .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

διάστημα (0,+∞).

Μονάδες 12

1

β. Να υπολογίσετε το lim xln(1+ ).

*x*→+∞

x

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός α∈(0,+∞)

α

α+1

τέτοιος ώστε (α+1) = α .

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image137image138image139image140

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

. Στο

τετράδιο

να

γράψετε

μόνο

τα

προκαταρκτικά

(ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην

αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα

χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και

με μολύβι.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη

σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

5

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image141

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1o

A.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι

παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x0, τότε είναι και συνεχής

στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του

∆

ιαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

B.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α. Η εικόνα f(∆) ενός διαστήματος ∆ μέσω μιας

συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

β. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα

[

α,β], τότε

β

∫

β

β

f (x)g΄(x)dx = ∫f (x)dx ⋅ ∫g (x)dx .

′

α

α

α

Μονάδες 2

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα

και α είναι ένα σημείο του ∆, τότε

∆

΄

⎞

⎛

x

⎜

⎟ =f(x) για κάθε x∈∆.

∫

f (t)dt

⎜

⎟

⎝

α

⎠

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image142

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και

συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το

σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το

διάστημα (Α,Β) όπου Α= lim f (x) και Β= lim f (x).

+

−

x→α

x→β

Μονάδες 2

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα

διάστημα ∆. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο ∆ και

f΄(x) = g΄(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του ∆,

τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈∆.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

∆

ίνεται η συνάρτηση

⎧

ημ3x

,

x < 0

⎪

x

⎪

f (x) =

⎨

⎪

x2 + αx + βσυνx, x ≥ 0.

⎪

⎩

α. Να αποδειχθεί ότι lim f (x) = 3.

−

x→0

Μονάδες 8

⎛

π⎞

β. Αν f΄⎜ ⎟ = π και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο

⎝

2 ⎠

x0=0, να αποδειχθεί ότι α = β = 3.

Μονάδες 9

π

γ. Αν α = β = 3, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα ∫ f (x)dx .

0

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image143image144image145

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

∆ίνεται η συνάρτηση

f(x) = ex − e lnx, x > 0.

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα (1, +∞).

Μονάδες 10

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει f(x) ≥ e για κάθε x > 0.

Μονάδες 7

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

x2 +2

x2 +2

x2 +3

4

∫

f (t)dt = ∫

f (t)dt + ∫ f (t)dt

x2 +1

2

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, +∞).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

ίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z = α+βi και z =

−

2

2

− z

∆

1 , όπου

1

2

−

+ z

1

α, β∈IR με β ≠ 0. ∆ίνεται επίσης ότι z − z ∈IR.

2

1

α. Να αποδειχθεί ότι z − z = 1.

2

1

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z1 στο

μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z2 είναι φανταστικός και αβ>0, να

1

υπολογισθεί ο z1 και να δειχθεί ότι

−

1

2

0

20

(z +1+ i) − (z +1− i) = 0.

1

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image146image147

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα

θέματα στο τετράδιο.

1

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη

σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο

στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια,

διαγράμματα και πίνακες.

3

4

5

6

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

7

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image148

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1o

A.

Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα [α, β].

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να

β

∫

αποδείξετε ότι

f (t)dt = G(β) – G(α)

α

Μονάδες 10

Β.

Γ.

Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του

∆

ιαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν

είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ’ ένα διάστημα ∆,

τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f

σε κάθε σημείο του ∆ βρίσκεται κάτω από τη

γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο

επαφής τους.

Μονάδες 2

β

∫

γ. Το ολοκλήρωμα

f (x)dx είναι ίσο με το άθροισμα

α

των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image149

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των

χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

α+βi=0 ⇔ α=0 ή β=0

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ’ ένα σύνολο της

μορφής (α, x )∪(x , β) και A ένας πραγματικός

ο

ο

αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

lim f(x) =A ⇔ lim (f(x) – A )= 0

x→x

x→x

o

o

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

1

+ i 3

∆

ίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός z1 =

είναι ρίζα της

2

2

εξίσωσης z +βz+γ=0, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι β=–1 και γ=1.

Μονάδες 9

3

β. Να αποδείξετε ότι z = –1.

1

Μονάδες 8

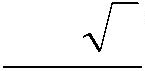
γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του

μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

w = z1 – z1

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image150

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

ίνεται η συνάρτηση f(x) = x2 – 2 ln x, x > 0.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: f(x)≥1 για κάθε x>0.

Μονάδες 6

∆

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f.

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

⎧

ln x

,

x >0

⎪

f (x)

⎪

g(x) = ⎨

⎪

,

x 0

=

k

⎪

⎩

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι

συνεχής.

Μονάδες 6

1

ii. Αν k = **–** , τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία,

2

τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, +∞) για την

οποία ισχύει f(x) > 0 για κάθε x ≥ 0. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

x

∫

F(x) =

f(t) dt ,

x∈[0, +∞),

0

F(x)

h(x) =

, x∈(0,+∞).

x

∫0

t f (t) dt

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image153image154image155image156

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

1

∫

α. Να αποδείξετε ότι

et –1[f (t) + F(t)]dt = F(1)

0

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως

φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞).

Μονάδες 8

γ. Αν h(1)=2, τότε:

2

2

∫

∫

∫

0

i. Να αποδείξετε ότι

f(t) dt < 2

tf(t)dt

0

Μονάδες 6

Μονάδες 5

1

1

2

ii. Να αποδείξετε ότι

F(t) dt = F(1)

0

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

2

. Στο

τετράδιο

να

γράψετε

μόνο

τα

προκαταρκτικά

(ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην

αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη

σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο

στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια,

διαγράμματα και πίνακες.

5

6

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

7

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image157image158

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1o

A.

Έστω η συνάρτηση f(x) = x . Να αποδείξετε ότι η f

είναι παραγωγίσιμη στο (0 , + ∞) και ισχύει:

1

f′(x) =

2

x

Μονάδες 9

B.

Έστω μια συνάρτηση f και xo ένα σημείο του πεδίου

ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο xo ;

Μονάδες 6

Γ.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό

ακέραιο ν ισχύει ( ) ( )

ν

ν

z

= z

Μονάδες 2

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε

οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της

f το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image159image160image161image162

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. Αν lim f(x) = 0 και f(x) < 0 κοντά στο x τότε

o

x→x

o

1

lim

= +∞

f (x)

x→x

o

Μονάδες 2

δ. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. H συνάρτηση f είναι

παραγωγίσιμη στο  = –{ x συνx = 0 } και ισχύει

1

1

′

=

f (x) -

συν2x

Μονάδες 2

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα

διάστημα ∆, ισχύει

∫

′

∈

f (x)dx = f(x) + c, x ∆

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους

ισχύει:

−

(

2

−

i

)

z

+

(

2

+

i

)

z

−

8

=

0

α. Nα βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των

μιγαδικών αριθμών z = x+yi οι οποίοι ικανοποιούν την

παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image163image164image165image166

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

β. Nα βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z1 και τον

μοναδικό φανταστικό αριθμό z2 οι οποίοι ικανοποιούν

την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 8

γ. Για τους αριθμούς z , z που βρέθηκαν στο προηγούμενο

1

2

2

2

ερώτημα να αποδείξετε ότι z1 + z2 + z1 − z2 = 40

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

ίνεται η συνάρτηση

f(x) = ln[(λ+1)x2+x+1] - ln(x+2), x > -1

∆

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με λ ≥-1

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το

όριο lim f(x) και να είναι πραγματικός αριθμός.

x→+∞

Μονάδες 5

Β. Έστω ότι λ = -1

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f

Μονάδες 6

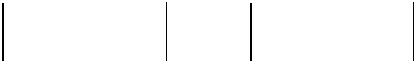
γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) + α2 = 0 έχει

μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με

α ≠ 0

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image167

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

ίνεται μια συνάρτηση f:[0, 2]→  η οποία είναι δύο φορές

παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

∆

f (x) − 4f′(x) + 4f (x) = k x e , 0 x 2

′

′

2x

≤

≤

f (0) = 2f (0), f (2) = 2 f(2)+12 e , f(1) = e

′

′

4

2

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

f′(x) − 2f (x)

g(x) = 3x2-

, 0≤ x ≤ 2

e2x

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle

στο διάστημα [0,2].

Μονάδες 4

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈(0,2) τέτοιο, ώστε να

ισχύει

β.

γ.

f (ξ) + 4f (ξ) = 6 ξ e + 4f (ξ)

′

′

2ξ

′

Μονάδες 6

Να αποδείξετε ότι k = 6 και ότι ισχύει g(x) = 0 για

κάθε x∈ [0,2].

Μονάδες 6

3

2x

δ.

ε.

Να αποδείξετε ότι f (x) = x e , 0≤ x ≤ 2

Μονάδες 5

Μονάδες 4

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

2

f (x)

x2

∫1

dx

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image169image170image171

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να

μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα. Να

μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μαύρο

στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια,

διαγράμματα και πίνακες.

5

6

7

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι

αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image172

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = ημx, x∈, είναι

παραγωγίσιμη στο  και ισχύει (ημ x)′ = συνx

Μονάδες 8

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε

ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α

παρουσιάζει στο x ∈A (ολικό) μέγιστο, το f(x );

0

0

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

′

α) Αν f(x) = αx, α > 0, τότε ισχύει

(α ) = xα

x

x−1

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε

πάντοτε ισχύει fog = gof

1

γ) Αν lim f (x) = + ∞ ή −∞, τότε lim

= 0

f (x)

x→x

0

x→x

0

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image173image174

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό

διάστημα [α,β] και ισχύει f(x)≥ 0 για κάθε x∈[α,β],

β

∫

τότε f (x)dx ≥ 0

α

ε) Για κάθε z∈C ισχύει z 2 = z ⋅z

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z , z είναι οι ρίζες εξίσωσης

1

2

δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες

ισχύουν

z +z = –2 και z ⋅ z = 5

1

2

1

2

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z1, z2

Μονάδες 5

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

2

2

2

w

−

z

+

w

−

z

= z1 − z2

1

2

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση

2

2

(x+1) + y = 4

Μονάδες 8

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β2 να

βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

2

⋅ Re(w) + Im(w) = 0

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image175

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

B4. Αν w , w είναι δύο από τους μιγαδικούς w του

1

2

ερωτήματος Β2 με την ιδιότητα w − w = 4, να

1

2

αποδείξετε ότι w + w = 2

1

2

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

∆ίνεται η συνάρτηση f(x) = (x–2)lnx + x – 3, x > 0

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο

∞

διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, + )

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει δύο ακριβώς

θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν x , x είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με x < x , να

1

2

1

2

αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός ξ∈(x , x ) τέτοιος,

1

2

ώστε ξ⋅f΄(ξ) – f(ξ) = 0

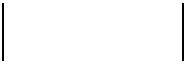
και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f στο σημείο Μ (ξ,f (ξ)) διέρχεται από την

αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image178

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ ∆

Έστω συνάρτηση f: → η οποία είναι παραγωγίσιμη και

κυρτή στο  με f(0) = 1 και f΄(0) = 0

∆

1. Να αποδείξετε ότι f(x) ≥ 1 για κάθε x∈

Μονάδες 4

1

∫

3

x

⋅

f

(

x

t

)

d

t

+

x

0

= + ∞

∆

2. Να αποδείξετε ότι lim

ημ3x

x→0

Μονάδες 6

Αν επιπλέον δίνεται ότι

f΄(x) + 2x = 2x⋅ (f (x) + x2 ), x∈, τότε:

∆

∆

3. Να αποδείξετε ότι

f(x) = e – x , x∈

2

x

2

Μονάδες 8

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

x+2

∫

h(x) =

f

(

t

)

d

t

,

x

≥

0

x

και να λύσετε στο  την ανίσωση

2

+2x+3

x

x

4

∫

∫

f

(

t

)

d

t

+

f

(

t

)

d

t

<

0

2

+2x+1

6

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image181image182

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να

μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον

με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης

μελάνης.

5

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι

αποδεκτή.

6

7

. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

8

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09.30 π.μ.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image183

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

∆

ΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι

παραγωγίσιμη στο  και για κάθε x∈ ισχύει

συνx ′

η

συνάρτηση f(x)=συνx είναι

(

) = –ημx

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

1

0

A2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα ∆. Να

διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή

παράγουσας της f στο ∆.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi, α,β∈ ισχύει

z– z=2β

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι

παρουσιάζει στο x ∈A (ολικό) μέγιστο το f(x ), όταν

0

0

f(x) ≤ f(x0) για κάθε x∈A

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα

διάστημα ∆, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image184image185

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ

)

Α

ν

lim f (x) =0 και f(x)>0 κοντά στο x0, τότε

x→x

0

1

lim

x→x

= + ∞

f (x)

0

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο

x0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη

στο σημείο αυτό.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

1

0

ΘΕΜΑ Β

ίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν

αντίστοιχα τις σχέσεις:

z − i =1+Im(z)

w( w+3i)=i(3 w+i)

∆

(1)

(2)

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση

1

2

y= x

4

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

7

B2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων

των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το

σημείο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=2 2 .

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

7

B3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου,

τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με

z =w.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

5

B4. Nα αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και

ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό

αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ,

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image186image187image188image189image190image191image192

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία

Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

6

Θ

Ε

Μ

Α

Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης y= x , x ≥ 0.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός

συστήματος συντεταγμένων Οxy και παρατηρεί το κινητό

από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

y

y= x

Α(4,2)

Π(0,1)

Μ

x

O

∆

ίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού

για κάθε χρονική στιγμή t, t≥ 0 είναι x (t) =16m/min

′

Γ

1

.

Ν

α

α

π

ο

δ

ε

ί

ξ

ε

τ

ε

ό

τ

ι

η

τ

ε

τ

μ

η

μ

έ

ν

η

τ

ο

υ

κ

ι

ν

η

τ

ο

ύ

,

γ

ι

α

κ

ά

θ

ε

χ

ρ

ο

ν

ι

κ

ή

στιγμή t, t≥ 0 δίνεται από τον τύπο:

x(t)=16t

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο

παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2)

και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η

οπτική επαφή.

Μ

ο

ν

ά

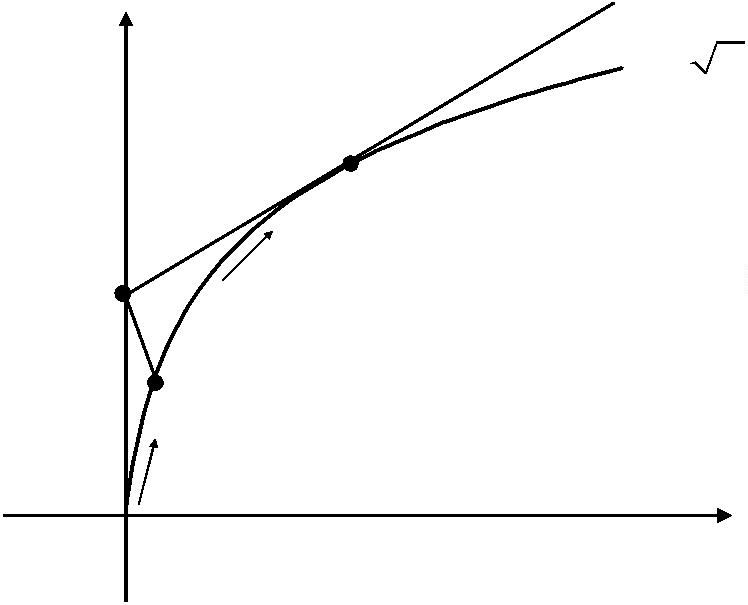
δ

ε

ς

6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image193image194

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που

διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το

σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

6

1

Γ

4

.

Ν

α

α

π

ο

δ

ε

ί

ξ

ε

τ

ε

ό

τ

ι

υ

π

ά

ρ

χ

ε

ι

χ

ρ

ο

ν

ι

κ

ή

σ

τ

ι

γ

μ

ή

t

∈

(

0

,

)

,

κ

α

τ

ά

τ

η

ν

0

4

οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό

γίνεται ελάχιστη.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι

σημεία του συστήματος συντεταγμένων Οxy.

Θ

Ε

Μ

Α

∆

∆

ίνεται η συνάρτηση f: →, η οποία είναι 3 φορές

παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

f (x)

x

i) lim

= 1+ f (0)

x→0

ii) f΄(0) < f(1)-f(0) και

iii) f (x) ≠ 0 για κάθε x∈ 

′

′

∆

∆

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με

τετμημένη x0=0.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

3

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο .

Μονάδες 5

Αν επιπλέον g(x)=f(x)–x, x∈ , τότε:

∆

3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και

ημx

να βρείτε το lim

xg(x)

x→0

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

6

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image196image197image198image199

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

2

∫

∆

∆

4. Να αποδείξετε ότι f (x)dx >2

0

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

5

5. Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη

γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x′x

5

και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι Ε(Ω)=e– ,

2

τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

1

∫

f (x)dx

0

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ∈ (1,2)

τέτοιο, ώστε

ξ

∫

f (t)dt =2

0

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

6

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν επιτρέπεται

να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο

στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια,

διαγράμματα και πίνακες.

3

4

5

6

7

. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

8

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image200image201

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με

εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x0, στο οποίο όμως η f είναι

συνεχής. Αν f΄(x)>0 στο (α, x ) και f΄(x)<0 στο (x , β), τότε να

0

0

αποδείξετε ότι το f(x ) είναι τοπικό μέγιστο της f

0

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Μονάδες 6

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι

συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής

παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των

μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των

διανυσματικών ακτίνων τους.

x

γ) Αν είναι 0<α<1, τότε lim α = +∞

x→+∞

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο

x0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x0

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image202

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα

[

α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β],

τότε

β

∫

f (t)dt = G(α) − G(β)

α

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με z≠–1, για τους

z −1

z +1

οποίους ο αριθμός w=

είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

B1. z =1

Μονάδες 7

Μονάδες 6

4

⎛

⎝

1⎞

z ⎠

B2. Ο αριθμός ⎜z − ⎟ είναι πραγματικός.

⎛

⎞

1

1

B3. ⎜ + ⎟ (z +z )≤4, όπου z , z δύο από τους παραπάνω

⎜

⎟

1

2

1

2

z

1

z

⎝

⎠

2

μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

B4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους

i

2

2

ισχύει u–ui= –w, w≠0, ανήκουν στην υπερβολή x –y =1

w

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:Ø, για την οποία ισχύει:

xf(x)+1=ex, για κάθε x∈ .

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image203image204image205image206image207image208

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

⎧

ex −

⎪

1, x ≠ 0

Γ1. Να αποδείξετε ότι f(x)=

⎨

x

⎪

, x = 0

⎩

1

Μονάδες 6

–

1

Γ2. Να αποδείξετε ότι oρίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f και

να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

παράστασης της f στο σημείο Α (0,f (0)). Στη συνέχεια, αν

είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η

εξίσωση

2

f(x)=x+2, x∈

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το lim [x(lnx)ln(f (x))]

+

x→0

ΘΕΜΑ ∆

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:AØ με Α=(0,+∞), για

την οποία ισχύουν:

•

•

f(A)=(− ∞,0]

η παράγωγος της f είναι συνεχής στο (0,+∞), και

⎛

⎝

1 ⎞

x ⎠

x

⎛ 1⎞

f (t) t + dt + 2, για κάθε x>0

∫

2f(x)+ x + ef (x)

=

e

f (t) ΄

•

⎜

⎟

⎜

⎟

⎝

t ⎠

1

x

∫

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση F(x)=

f (t)dt , x>0

1

⎛

⎝

2x ⎞

⎟, x>0

x 1

∆

1. Να αποδείξετε ότι f(x)=ln⎜

2

+ ⎠

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image209image210image211image212

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

∆

2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει

μοναδικό σημείο καμπής Σ(x , F(x )), x >0, το οποίο και

0

0

0

να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει

μοναδικό ξ∈(x , β) με β>x , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της

0

0

γραφικής παράστασης της F στο σημείο M(ξ, F(ξ)) να είναι

παράλληλη προς την ευθεία

ε: F(β) x–(β–1)y+2012 (β–1)=0

Μονάδες 6

∆

∆

3. Αν β>1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

[

F(β) + (1− β)f (β)]x5 (β −1) (x +1)3

+

= 0

x −1

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3)

Μονάδες 5

x − 3

4. Να αποδείξετε ότι

x

2

x

⎛

⎝

t ⎞

f⎜ ⎟dt ≤ t f (t) dt, για κάθε x > 0

x ⎠

∫

∫

x

1

Μονάδες 6

Ο

∆

Η

Γ

Ι

Ε

Σ

(

γ

ι

α

τ

ο

υ

ς

ε

ξ

ε

τ

α

ζ

ο

μ

έ

ν

ο

υ

ς

)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη

σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και

πίνακες.

5

6

7

. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

εξέτασης:

τρεις

(3)

ώρες

μετά

τη

διανομή

των

8

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Τ

Ε

Λ

Ο

Σ

Μ

Η

Ν

Υ

Μ

Α

Τ

Ο

Σ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image213image214image215

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x0 , να

αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία

λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο

τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη

λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει z = − z

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1−1 στο πεδίο ορισμού της, τότε

υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια

τεταγμένη.

(μονάδες 2)

( )

( ( ))

γ) Αν lim f x = −∞ , τότε lim −f x = +∞

x→x

x→x0

0

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f , g παραγωγίσιμες στο x0

ισχύει:

′

( ) ( ) ′( ) ( ) ( ) ′( )

f g x = f x g x − f x g x

0

0

0

0

0

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν

μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image216image217

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

2

x

2

− w − 4 − 3i x = −2 z , x ∈ \

έχει μια διπλή ρίζα, την x = 1

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό

επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ1 = 1,

καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό

επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα ρ2 = 4

Μονάδες 8

B2. Nα αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του

οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να

αποδείξετε ότι:

z − w ≤ 10 και z + w ≤ 10

Μονάδες 6

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να

βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

2

2

z − 3z − 2zz = 5

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :  →  για την οποία ισχύουν:

( )

(f′(x) − 3) = − f′(x) για κάθε x ∈ 

2

•

•

2

xf x + x

1

( )

f 1 =

2

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image218image219image220image221image223

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

x

3

( )

f x =

x ∈ 

,

x

2

+ 1

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο 

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

(

) (

− 8 ≤ f 8(x

)

+ 1)

f 5(x

2

+ 1)

3

2

2

Μονάδες 7

( )

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ ∈ 0, 1 τέτοιο, ώστε:

ξ3 −ξ

∫

( )

(

) ( − ξ)

− 1 f ξ

f t dt = −ξ 3ξ

2

3

0

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

[

)

Δίνεται συνάρτηση f : 0, + ∞ →  δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή

[

)

δεύτερη παράγωγο στο 0, + ∞ , για την οποία ισχύουν:

x

⎛

u

⎞

∫

∫

( ′( ))

2

f t − 1

( )

⎜

⎟

dt du για κάθε x > 0

•

•

f x = x +

( )

⎜

f t

⎟

⎝

1

⎠

1

( ) ′( ) ≠

f x f x 0 για κάθε x > 0 και f 0

( ) =

0

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

′

( )

f x

3

( ) ( ′( ))

με x > 0 και h x = f x

g(x) =

με x ≥ 0

( )

f x

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image224image225image226image227

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ1. Nα αποδείξετε ότι:

( ′( ))

2

( ) ′′( )

f x f x + 1= f x

για κάθε x > 0

Μονάδες 4

( + ∞)

στο 0,

Δ2.

α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f′

(μονάδες 4)

′

( ) =

1

β. Να αποδείξετε ότι f 0

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

(

)

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο 0, + ∞ , να αποδείξετε

ότι:

( )

(

)

α.

β.

g x ≥ 2 − x

για κάθε x ∈ 0, + ∞

(μονάδες 2)

∫

1

(

) ( )

2 − x f x dx < 1

0

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

′

=

παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x x και τις ευθείες x 0 και

x = 1

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

.

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο

εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή.

Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την

ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα

θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις

σας το όνομά σας.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα

δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας

να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image228

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

3

.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή

μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται,

και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4

5

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια

φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

εξέτασης:

τρεις

(3)

ώρες

μετά

τη

διανομή

των

6

.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image229

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με

εξαίρεση ίσως ένα σημείο x0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η

′

∪

f (x) διατηρεί πρόσημο στο (α, x ) (x , β), τότε να αποδείξετε ότι το

0

0

f(x0 ) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο

(α, β)

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε

αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο

τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη

Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α

)

Η

ε

ξ

ί

σ

ω

σ

η

z

−

z

=

ρ

,

ρ

>

0

π

α

ρ

ι

σ

τ

ά

ν

ε

ι

κ

ύ

κ

λ

ο

μ

ε

κ

έ

ν

τ

ρ

ο

τ

ο

σ

η

μ

ε

ί

ο

0

Κ(z0 )

ρ, όπου z, z0

μιγαδικοί αριθμοί.

και ακτίνα

(μονάδες 2)

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της

μορφής (α, x )∪ (x , β) Ισχύει η ισοδυναμία

.

0

0

⎛

⎝

⎞

⎠

( ) = −∞ ⇔

lim f x

( ) =

( ) = −∞

lim f x

⎜ lim f x

⎟

x→x

x→x−

x→x+

0

0

0

(μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image230image231

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

γ

)

Α

ν

ε

ί

ν

α

ι

0

<

α

<

1

,

τ

ό

τ

ε

l

i

m

α

x =

0

x→ −∞

(μονάδες 2)

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές

παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε

′

′

υποχρεωτικά f (x) > 0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

(μονάδες 2)

)′

(∫ g(x)

′

( )

f g(x) g (x)

ε

)

f(t) dt

=

α

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

1

0

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , w για τους οποίους ισχύουν:

2

z − i

z + i

i

•

•

w =

,

z ≠ −

2

2

w

φανταστικός

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα

1

⎛

1⎞

ρ = ,

M 0, −

εκτός από το σημείο

⎜

⎟ του κύκλου.

2⎠

2

⎝

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

1

0

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος Β1, να

βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει w = 1

Μονάδες 8

1

z = ,

B3. Αν είναι

τότε να αποδείξετε ότι

2

w4 + i w7 = 0

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image232image233image234image235image236image237

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

ꢀ

nx

⎧

x

⎪

e

, αν x > 0

, αν x = 0

⎪

( ) =

f x

⎨

⎪

⎪

0

⎩

x0 = 0

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

4

Μονάδες 7

(μονάδες 2)

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι, για x > 0, ισχύει η ισοδυναμία

f(x) = f(4) ⇔ x4 = 4x

=

x

>

x4 4 , x 0, έχει ακριβώς δύο ρίζες,

ii) Nα αποδείξετε ότι η εξίσωση

τις x1 2 και

=

x2 = 4

(μονάδες 6)

Μονάδες 8

Γ

4

.

Ν

α

α

π

ο

δ

ε

ί

ξ

ε

τ

ε

ό

τ

ι

υ

π

ά

ρ

χ

ε

ι

έ

ν

α

,

τ

ο

υ

λ

ά

χ

ι

σ

τ

ο

ν

,

ξ

∈ (2, 4) τέτοιο, ώστε

ξ

∫

′

( 2 − f(ξ))

( )

f (ξ) f(t) dt = f ξ

2

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image238image239

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

f: A → ꢁ, A = (0, +∞)

με σύνολο τιμών f (A) = ꢁ , τέτοια, ώστε

f(x)

e (

f (x)− 2f(x)+ 3 = x

2

)

,

για κάθε

x ∈(0, + ∞)

Δ

1

.

N

α

α

π

ο

δ

ε

ί

ξ

ε

τ

ε

ό

τ

ι

η

σ

υ

ν

ά

ρ

τ

η

σ

η

f

α

ν

τ

ι

σ

τ

ρ

έ

φ

ε

τ

α

ι

(

μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

4

)

κ

α

ι

ν

α

β

ρ

ε

ί

τ

ε

−1

την αντίστροφη συνάρτηση f της f (μονάδες 3)

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

7

Γ

ι

α

τ

α

ε

ρ

ω

τ

ή

μ

α

τ

α

Δ

2

κ

α

ι

Δ

3

,

δ

ί

ν

ε

τ

α

ι

ό

τ

ι

f (x)

= ex

−

(x2 − 2x + 3), x∈ ꢁ

1

−1

Δ

2

.

Ν

α

μ

ε

λ

ε

τ

ή

σ

ε

τ

ε

τ

η

σ

υ

ν

ά

ρ

τ

η

σ

η

f

ω

ς

π

ρ

ο

ς

τ

η

ν

κ

υ

ρ

τ

ό

τ

η

τ

α

.

(

μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

3

)

Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

−1

γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της γραφικής

′

−

1

παράστασης της f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y y, και την

ευθεία x = 1 (μονάδες 6)

Μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

9

ꢁ

θ

ε

ω

ρ

ο

ύ

μ

ε

τ

α

σ

η

μ

ε

ί

α

(

−

) (

−

)

των

x

∈

A x, f 1(x) , B f 1(x), x

Δ

3

.

Γ

ι

α

κ

ά

θ

ε

−1

γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f αντίστοιχα.

i)

Να αποδείξετε ότι, για κάθε x ∈ ꢁ , το γινόμενο των συντελεστών

διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των

−1

συναρτήσεων f και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο

με 1 (μονάδες 3)

ii)

Να βρείτε για ποια τιμή του x∈ ꢁ η απόσταση των σημείων A , B

γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image240

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο

Δ

Η

Γ

Ι

Ε

Σ

(

γ

ι

α

τ

ο

υ

ς

ε

ξ

ε

τ

α

ζ

ο

μ

έ

ν

ο

υ

ς

)

1

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο

εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην

αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το

εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη

γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2

3

.

.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα

δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με

μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το

ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

Σ

Α

Σ

Ε

Υ

Χ

Ο

Μ

Α

Σ

Τ

Ε

K

Α

Λ

Η

Ε

Π

Ι

Τ

Υ

Χ

Ι

Α

Τ

Ε

Λ

Ο

Σ

Μ

Η

Ν

Υ

Μ

Α

Τ

Ο

Σ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image241

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια

παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

G(x)

όλες οι συναρτήσεις της μορφής

είναι

παράγουσες της f στο Δ, και

κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

G(x)

**Μονάδες 7**

f:A

λέγεται συνάρτηση

1-1**;**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση

**Μονάδες 4**

x

**A3.** Πότε η ευθεία

λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής

παράστασης μιας συνάρτησης f**;**

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο*

*τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη*

***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

z

(

z

ν

)

ν

, όπου θετικός ακέραιος.

**α)** Αν

, τότε

**β)** Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο

x0

και ισχύει

f(x)

x

, τότε

lim f(x)

)

κοντά στο

0

x

0

0

**γ)** Αν lim f(x)

τότε f(x)>0 κοντά στο

x

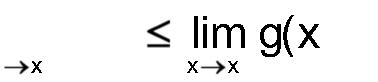
0

x

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2,

της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image242image243image245image248image250image251image253image254

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ε)** Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β] και G είναι

μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε πάντοτε ισχύει:

β

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

z

,

w

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

για τους οποίους ισχύουν:

2

2

z

w

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση

x

**Μονάδες 9**

**B2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών

1

αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση

y

4

**Μονάδες 9**

**B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη

z

τιμή του μέτρου

.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

f

(

x

)

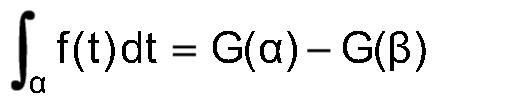
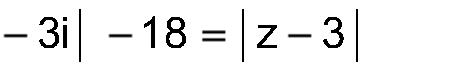
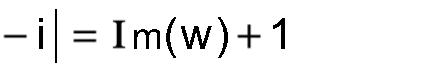
Δίνεται η συνάρτηση

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το

σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image255image257image258image260image261image263image264image265

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με

h

(

x

)

g

(

x

)

όπου h(x)

.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

f

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x1 ,x2

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν για τις ρίζες x ,x του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι x

1

τότε να

1

2

αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ

τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη

1

της γραφικής παράστασης της f στο σημείο ξ,f(ξ) να διέρχεται από το

(

)

σημείο Μ

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

f

:

(

0

,

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

για την οποία ισχύει:

(

x

2

x

για κάθε

f

(

x

)

**Δ1.** Nα αποδείξετε ότι

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι

x

**Μονάδες 6**

x

1

t

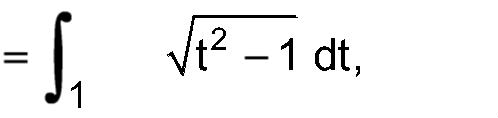
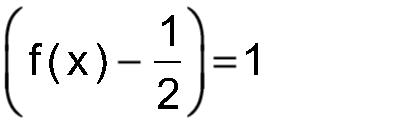
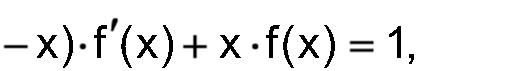
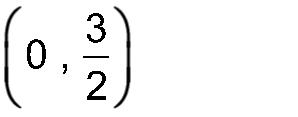
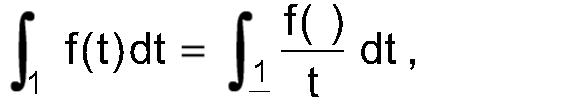
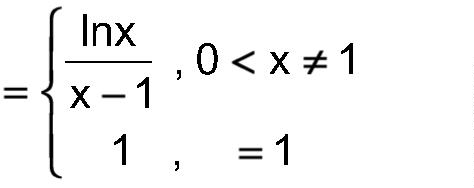
x

για κάθε

x

**Μονάδες 4**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image268image270image272image273image277image280

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ3. α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

1

t

g

(

x

)

είναι κοίλη.

(μονάδες 5)

**β.** Έστω Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της g, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g

στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα x

και την ευθεία x

Να αποδείξετε ότι

E

(μονάδες 4)

**Μονάδες 9**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

x

x

x

για κάθε

x

x

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1**

**.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο**

**εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην**

**αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το

εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη**

**γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

**2**

**3**

**.**

**.**

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα**

**δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με

μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το

ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

**4**

**5**

**6**

**.**

**.**

**.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

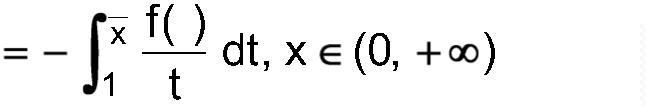
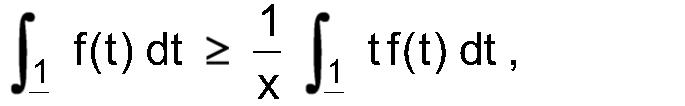
Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image281image283image284image285image287

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και xo ένα εσωτερικό σημείο

του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο xo και είναι παραγωγίσιμη στο

σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι f

.

o

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία y

της συνάρτησης f στο

είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης

;

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας,*

*δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση*

*είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

συν x

lim

x

**α)**

.

x

1

x

**β)** Αν f(x)

για κάθε

x

, τότε

f

x

για κάθε

.

**γ)** Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο

x

, τότε η

f δεν είναι

o

x

παραγωγίσιμη στο

.

o

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν

, η οποία έχει ασύμπτωτη.

**ε)** Για κάθε συνάρτηση f , συνεχή στο [α,β], ισχύει:

β

αν

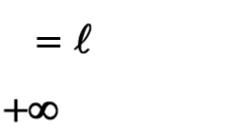
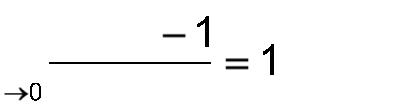
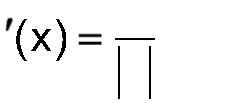
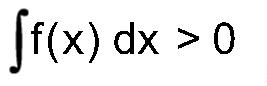
, τότε f(x)

στο [α,β].

α

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image288image289image291image292image294image295image297image298image300

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

.

**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

**Μονάδες 2**

lim f(x)

x

lim f(x)

x

**α)**

**β)**

lim f(x)

x

lim f(x)

x

lim f(x)

x

**γ)**

**δ)**

**ε)**

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 7**

**Μονάδες 9**

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

1

1

**α)** lim

**β)** lim

**γ)**

lim f(f(x))

f(x)

f(x)

x

x

x

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

x

f

f

του πεδίου ορισμού της για τα οποία ισχύει

**B5.** Να βρείτε τα σημεία

.

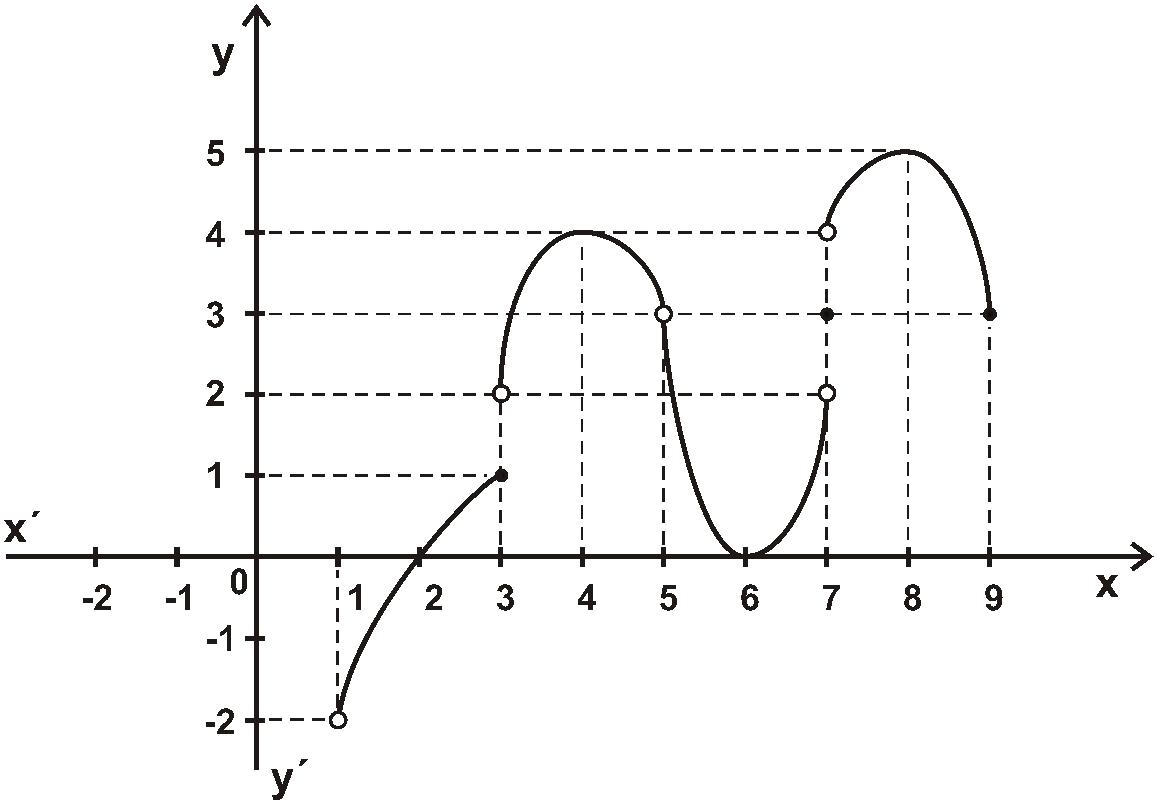
o

o

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image301image302image303image304image305image306image307image308image309image310image311image312

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Γ**

f :

f(x)

Δίνεται η συνάρτηση

με

**.**

**Γ1.**

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την

f

αντίστροφη συνάρτηση

Να αποδείξετε ότι για κάθε

(μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

x

**Γ2.**

ισχύει:

1

6

f(ημ x)

.

**Μονάδες 9**

**Γ3.**

Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης y

με x

και

y

. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της

y(t)

του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης

x(t), αν

τεταγμένης

υποτεθεί ότι x

για κάθε

t

.

**Μονάδες 4**

g:

**Γ4.**

Αν

είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

1

.

-1

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση

f(x)

,

x

**Δ1.** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο (0,

(μονάδες 3) και να βρείτε, αν

υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(μονάδες 2)

**Μονάδες 5**

x

είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της .

f

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το

o

**Μονάδες 8**

**Δ3. i)**

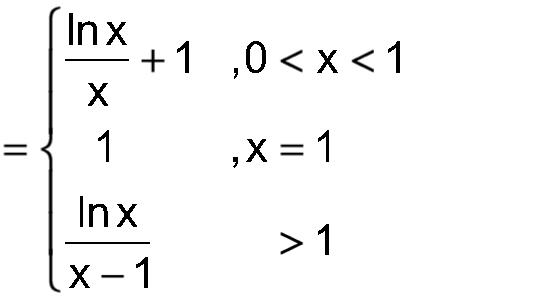
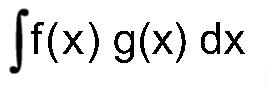
Να αποδείξετε ότι η εξίσωσηf(x)

έχει μοναδική ρίζα στο (0,

.

(μονάδες 3)

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image314image316image317image318image319image320image321image322image326image327image328image329

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ii)** Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της f , τον άξονα των x και τις ευθείες x

και x

, όπου xo

o

η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)

στο (0,

, να αποδείξετε ότι

E

.

2

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Αν F είναι μια παράγουσα της f στο [1,

να αποδείξετε ότι

(x

για κάθε x

.

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1**

**.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο**

**πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των**

**απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά

στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

**2**

**3**

**.**

**.**

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως

μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα**

**βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε

μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο

στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση,

και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

**4**

**5**

**6**

**.**

**.**

**.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

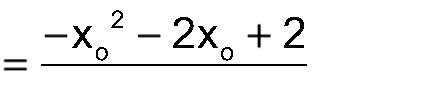
Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image330image331image332image333image335image336image337

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και xo ένα εσωτερικό σημείο

του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο xo και είναι παραγωγίσιμη στο

′

=

σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι f (x ) 0.

o

Μονάδες 7

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«

Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \ , αν για

κάποιο x ∈ \ ισχύει f (x ) 0, τότε το x είναι θέση σημείου καμπής της ».

′

′

=

f

o

O

o

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το

γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(μονάδα 1)

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η

οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση f : [α,β] → \ αν ισχύει f(α)⋅ f(β) > 0 τότε

,

,

α) η εξίσωση f(x) = 0 δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση f(x) = 0 έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

f(x) = 0 στο (α,β).

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image338

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας,

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση

είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f : [α,β] → \ , αν G είναι μια παράγουσα της f

α

∫

στο [α,β], τότε

f(x) dx= G(α) − G(β).

β

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου

ορισμού της, αν υπάρχουν x ,x ∈ Δ με x < x , ώστε f(x ) < f(x ).

1

2

1

2

1

2

γ) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης

συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄

−

1.

της

f

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f : [α,β] → \ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

,

(α,β), αν f(α) = f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα ξ ∈ (α,β) τέτοιο ώστε f ( ) 0

′ ξ =

.

α

∫

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f : [α,β] → \ , αν ισχύει

f(x) = 0 για κάθε x∈[α,β].

f(x) dx 0, τότε

=

β

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται

το

τετράγωνο

ΑΒΓΔ

του

διπλανού

Δ

Η

Γ

σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ

έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:

x

x

Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του

Ζ

x.

Θ

Μονάδες 6

Β2. Να

αποδείξετε

ότι

το

εμβαδόν

του

x

x

τετραγώνου ΕZΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

Α

Ε

Β

f(x)=2x − 4x + 4, 0 ≤ x ≤ 2

2

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ

γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει x ∈[0, 2], για το οποίο το εμβαδόν f(x )

o

o

του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με

4e

xo + 1 cm2.

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image339

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0, 3], για

την οποία γνωρίζετε τα εξής:

′

•

Η γραφική παράσταση της f δίνεται στο παρακάτω σχήμα:

9

1

0

2

3

-

3

•

•

f(0) = 2 , f (1) = 0

Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής

παράστασης της f΄ και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.

•

f

Η

δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών

[0, 3].

στο διάστημα

Γ1. Να αποδείξετε ότι f(3) = 2, f(2) = − 2 και να βρείτε, αν υπάρχουν,

f(x)

lnx

x

Aim

x→1

,

A

i

m

τα

, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

f(x)- 2

x

→

0

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως

αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών

ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

Μονάδες 8

(

)

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό xo

∈

γ

ι

α

τ

ο

ο

π

ο

ί

ο

δ

ε

ν

1

υπάρχει το lim

.

f(x)

x→x

o

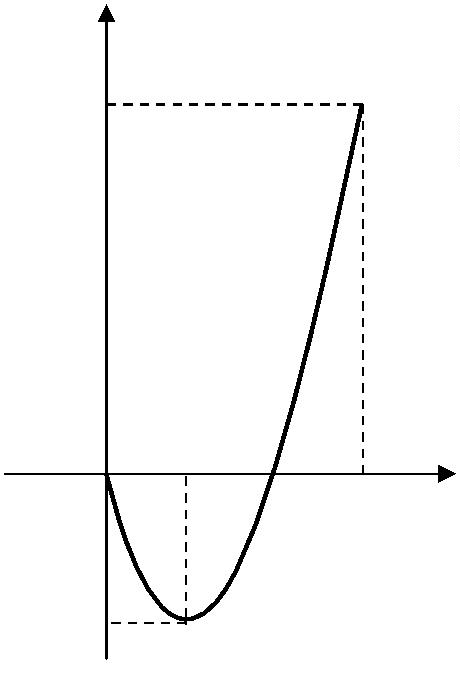
Μονάδες 5

Μονάδες 4

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f

.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image341image342image343

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

⎧

η

μ

x

π

−

+

α

,

−

≤

x

<

0

⎪

x

2

x = 0

⎪

f(x) = ⎨

2,

Δίνεται η συνάρτηση

⎪

x

3

−

3

x

2

+

2

,

x

>

0

.

⎪

⎩

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα [0, 2] ικανοποιεί τις υποθέσεις

του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του α ∈\

.

Μονάδες 2

Μονάδες 8

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f

.

∫

2

3π

π

<

f(x) dx <

−

1

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

.

−

π

2

2

Μονάδες 7

f(− x)=f(

⋅

−

⋅ e−

)

π

π

x

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

λύση στο (0,1).

έχει μοναδική

2

2

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image345image346image347image348image349

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο

πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των

απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά

στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2

3

.

.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως

μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα

βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε

μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο

στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image350

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με

εξαίρεση ίσως ένα σημείο του xo , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

′

∪

Αν η f (x) διατηρεί πρόσημο στο (α, x ) (x ,β), να αποδείξετε ότι το

o

o

f(xo ) δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη

στο (α, β).

Μονάδες 7

A2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του ꢀ . Τι ονομάζουμε πραγματική

συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

A3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.

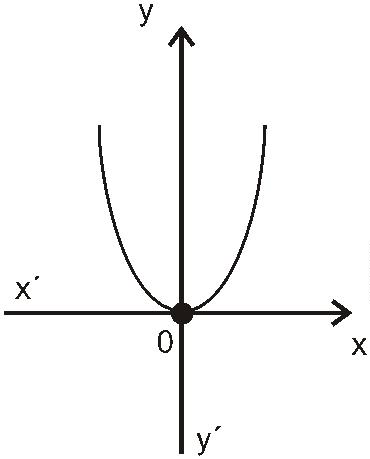
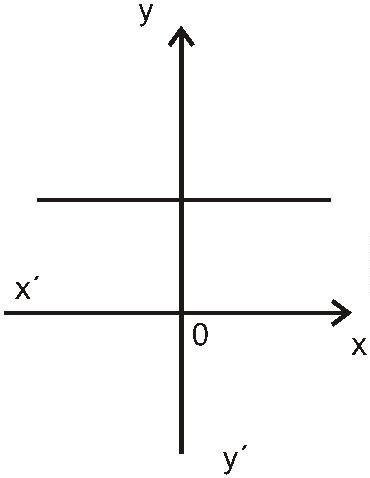
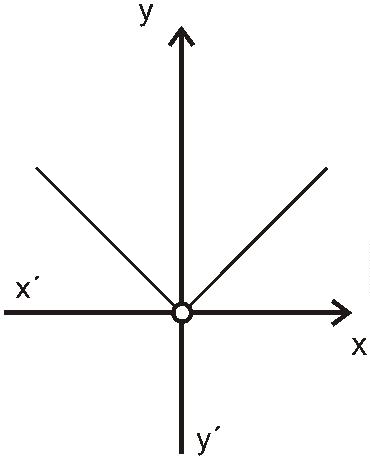
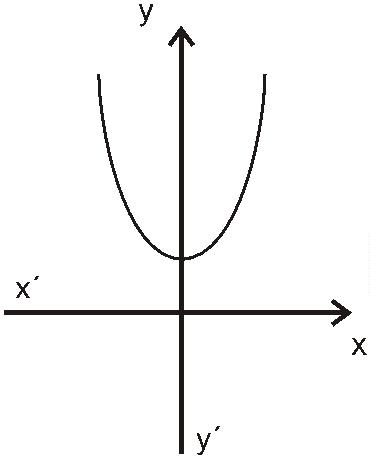
(f)

(g)

(F)

(G)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image351

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

(H)

(T)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T

μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

A4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g : (0,+∞ → ꢀ

, αν

)

lim f(x) = +∞

lim g(x) = −∞

lim[f(x) + g(x)] = 0

ισχύει

και

, τότε

».

x→0

x→0

x→0

α)

β)

Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας

το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι

ψευδής. (μονάδα 1)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες

3

)

Μονάδες 4

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο

τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη

λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f : ꢀ → ꢀ μπορεί να

τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση f : ꢀ → ꢀ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια

ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα

σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0, 1] και

ꢁ

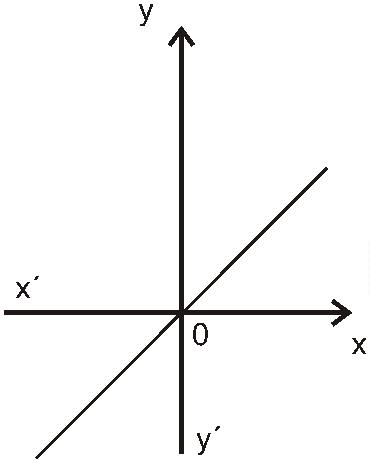
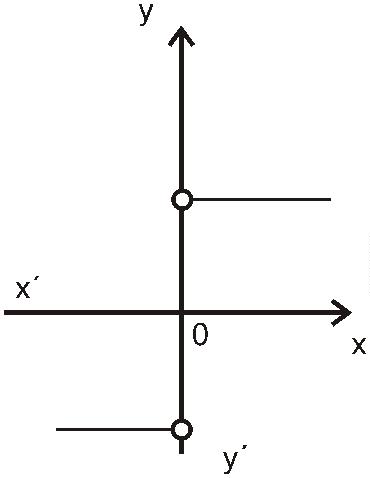
σύνολο τιμών το [2, 3], τότε ορίζεται η f g με πεδίο ορισμού το

[

0, 1] και σύνολο τιμών το [2, 3].

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image356

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β

⎧

x +1, x > 1

⎪

f(x) = ⎨ x

Δίνεται η συνάρτηση

.

⎪

x

2

+ α, x ≤ 1

⎩

Β1. Να υπολογίσετε το α ∈ ꢀ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α = 1 .

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του

[

θεωρήματος Rolle στο διάστημα

1, 4].

2

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

στα οποία

η

εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία

1

y = − x + 2018 και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων

4

στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να

παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f : [0, π] → ꢀ, με τύπο: f(x) = 2 ημx − x .

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε xo ∈[0, π] η γραφική παράσταση της f

και η εφαπτομένη της στο A(x , f(x )) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

o

o

Μονάδες 5

∫

π

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

f(x)⋅συν x dx .

0

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image359image360image361image362

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

f(x)

lim

= 1

. (μονάδες 2)

Γ4. α)

β)

Να αποδείξετε ότι

Να υπολογίσετε το

x

x→0

lim [(f(x) − f(2x))⋅ln x]

. (μονάδες 5)

Μονάδες 7

x→0

ΘΕΜΑ Δ

ln(x +1)

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, + ∞) → ꢀ , με τύπο:

.

f(x) =

x

x

x +1

ln(1+ x) >

>

x 0

Δ1. Να αποδείξετε ότι

, για κάθε

.

Μονάδες 5

−1

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της

είναι το διάστημα (0, 1).

f

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι f(x) > 2f(x) −1, για κάθε x > 0.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

f(α) f−1(α) ημ(πα)

+

+

= 0,

όπου

0 < α < 1,

x −1 x − 2

x

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα (0, 1) και μία

στο διάστημα (1, 2).

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα (0, + ∞) με

2e+1

e +1

F(e) = e⋅ln2, να αποδείξετε ότι ln2 < F (1) < ln(

).

Μονάδες 5

.

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image363image364image365image366image367image368

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο

πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των

απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά

στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2

3

.

.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως

μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα

βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε

μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο

στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image369

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με

εξαίρεση ίσως ένα σημείο του xo , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.









Αν f (x) 0 στο (α, x ) και f (x) 0 στο (x , β), να αποδείξετε ότι το

o

o

f(xo ) είναι τοπικό μέγιστο της f .

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε

αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού

και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο*

*τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη*

*λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

**α)** Η γραφική παράσταση της | f | αποτελείται από τα τμήματα της

γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον





άξονα x x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x x, των

τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω

από αυτόν τον άξονα.

**β)** Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β], ισχύει:





Αν

f(x)dx  0, τότε f(x)  0 για κάθε x  [α, β].



**γ)** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης

μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

f

μπορεί να είναι

**δ)** Αν lim f(x)  0, τότε f(x)  0 για x κοντά στο x .

o

xx

o

f :

**ε)** Μια πολυωνυμική συνάρτηση

διατηρεί πρόσημο σε

κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f

χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

image370

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

f(x)  x  1

2

f :

με τύπο

και

g : [2,  ) 

με τύπο g(x)  x  2 .

**Β1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g f έχει πεδίο ορισμού το

A = (-,-1]  [1,+) και τύπο (g f )(x)

2

x 1 .

**Μονάδες 5**

**Β2.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g f

στο .

**Μονάδες 6**

xo  2

**Β3.** Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο

της συνάρτησης

(g f )(x)

h : A  {2} 

h(x) 

με τύπο

.

x  2

**Μονάδες 6**

**Β4.** Έστω η συνάρτηση



(g f )(x), x  A

φ(x) 



1

 x

2

,

x (1, 1)



Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle

t(x)  φ(x) ημ(πx)

[0, 2].

για τη συνάρτηση

στο διάστημα

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

f : [0,  ) 

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

, για την οποία ισχύει ότι

1

f(x) f(x) 

x  0

και της οποίας η γραφική παράσταση

Cf

για κάθε

2

3

διέρχεται από το σημείο

M(1, 1). Έστω το σημείο A( , 0)

.

2

f(x)  x, x  [0,  )

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι

.

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της

απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

C

που

f

**Μονάδες 6**

C

**Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη

,

f

την εφαπτομένη της

στο σημείο

M

και τον άξονα .

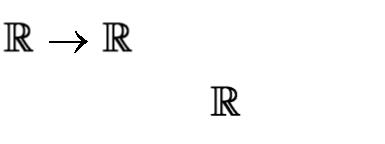
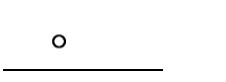
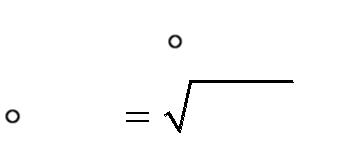
xx

C

f

**Μονάδες 7**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

image372image374image381image382image383

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**Γ4.** Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

g : [0,  )  , για την οποία ισχύει 0  g(x)  1 για κάθε x  0. Να

δείξετε ότι η εξίσωση f(x)  g(x) έχει μοναδική ρίζα xo , η οποία

ανήκει στο (0, 1) .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

x3

f(x) 

Δίνεται η συνάρτηση f :

, με τύπο

.

3

x2  3x  1

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο

.

**Μονάδες 4**

(μονάδες 2) και

στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι f(x)  f(1 x)  1 για κάθε

x 



περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x x και την

1

ευθεία x  1 ισούται με

(μονάδες 4).

2

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 6**



1

2f

2

(x)dx  1

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι

.

0

π

(0,

)

την εξίσωση

**Δ4.** Να λύσετε στο διάστημα

2

─

f(ημ

2

x)  f(συν x)  f(εφx  e**συνx ημx** ) .

2

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1**

**.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο**

**πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των**

**απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά

στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

**2**

**3**

**.**

**.**

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως

μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα**

**βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε

μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο

στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

**4**

**5**

**6**

**.**

**.**

**.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

image384image387image390image391

**ΝΕΟ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

**ΘΕΜΑ Α**

x

**A1.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο

, να αποδείξετε

o

ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο xo και ισχύει:

(f  g)΄(x )  f΄(x )  g΄(x )

.

0

0

0

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f

xo  A

παρουσιάζει στο

τοπικό μέγιστο**;**

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε

γεωμετρικά.

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο*

*τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη*

*λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

**α)** Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου

ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

**β)**

lim e  

x

x

**γ)** Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της

f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

1

**δ)** (ln | x |)΄   , για κάθε x<0.

x

**ε)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν

μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

f (x)  x

2

  και g(x)  x  , όπου , 

για

Δίνονται οι συναρτήσεις

**,**

(f

x

2

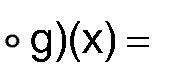
 2x**,** για κάθε x  .

τις οποίες ισχύει

**Β1.** Να αποδείξετε ότι α  β  1.

**Μονάδες 5**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

image392image394

**ΝΕΟ**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**Β2.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την

αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

**Μονάδες 6**

**Β3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση

g 1



και να παραστήσετε γραφικά

τη συνάρτηση

(x)



(g1

.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Έστω

η

συνάρτηση

h : [0, 1] 

f(x)  2  h(x)  g(x)  2 , για κάθε x  [0, 1]**.**

για

την

οποία

ισχύει

**,**

i) Nα αποδείξετε ότι lim h(x) 2 (μονάδες 3).



x 1

h(x)  7  3

h2(x)  4

ii) Να υπολογίσετε το όριο lim

(μονάδες 5).

x



1

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

με τύπο

f(x) x

.

3

f :

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι από το σημείο N(2,f(2)) διέρχονται δύο ακριβώς

εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις

εξισώσεις τους.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Έστω (ε): y=3x-2 η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**.

Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και

διέρχεται από το σημείο Μ(0,α) με -2<α<2. Να αποδείξετε ότι

ανάμεσα στις ευθείες x=-1 και x=+1 υπάρχει ακριβώς ένα σημείο

τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f .

**Μονάδες 9**

M(x, x

3

)

κινείται κατά μήκος της καμπύλης

y  x

3

**Γ3.** Ένα υλικό σημείο





με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του x (t) 0. Το σημείο Μ ξεκινά

από το σημείο Ν(-2, -8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε

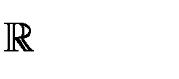
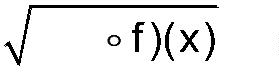
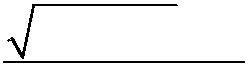
ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του

σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης

του**;**

**Μονάδες 8**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

image398image403

**ΝΕΟ**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**ΘΕΜΑ Δ**



Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f : (0, )



για την οποία ισχύουν:

2



f(x) συν

3

x  f΄(x) 

2

x  x  1 0 , για κάθε x (0, ),





2



6  2 3

f( ) 

.

3

3



**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x)  f(x) x  x, x (0, ) είναι

2

1

1



σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι f(x) 



, x (0, ).



x x

2

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό



ελάχιστο στο x  , το οποίο και να βρείτε.

0

4

**Μονάδες 6**



**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)  3 2 στο διάστημα (0, ) έχει

2

1,2,

1  

με .

2

ακριβώς δύο ρίζες

**Μονάδες 6**

f ( )(4   





) 4 2

, όπου

2

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

ερωτήματος **Δ3**.

η ρίζα του

2

2

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1.**

**2.**

**3.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-**

**πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να

γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα

θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις

σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε**

**καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα

φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό

με μελάνι που δεν σβήνει.

**4.**

**5.**

**6.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

image406

**ΠΑΛΑΙΟ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα

(α, β), με

εξαίρεση ίσως ένα σημείο xo , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.









Αν f (x) 0 στο

(α, xo )

και

f (x) 0

στο

(xo, β), τότε να αποδείξετε

**Μονάδες 7**

ότι το f(xo ) είναι τοπικό μέγιστο της f .

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

x  xo

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία

είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της

γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

**Μονάδες 4**

**Α4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«

Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και







x

κυρτή στο

ισχύει f (x) 0 για κάθε

.»

,

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο

τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν

είναι **ψευδής**.

(Μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**.

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο*

*τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη*

*λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

f, g

**α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων

για τις οποίες ορίζονται οι

f

g

f

συναρτήσεις

και

, ισχύει

.

f, g

**β)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων

για τις οποίες υπάρχουν τα

όρια lim f(x), lim g(x) και

f(x)  g(x)

για κάθε

x

κοντά στο ,

x

o

xx

xx

o

o

ισχύει lim f(x)  lim g(x).

xx

xx

o

o

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΑΛΑΙΟ**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**γ)** Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο [, β], η οποία δεν είναι





f(x)dx  0

παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και

, τότε η f



παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο [, β].

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις

f(x)  (x  α)

2

1, x [1,  ), α

και

της

g(x)  x 1, x 

2

.

C

f στο σημείο με τετμημένη

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης

f

xo  0

είναι ίση με 2, τότε:

α  1

**Β1.** Να αποδείξετε ότι

.

**Μονάδες 5**

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την

αντίστροφή της, 1.

f



**Μονάδες 8**

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 6**

Αν

f1(x)



x  1  1, x [ 1,

   ), τότε:

1

**Β3.** Να βρείτε τη συνάρτηση

f

.

**Β4.** Να βρείτε το όριο

f

1(x)  1

(f1

, όπου (f1

.

lim

x 1

**ΘΕΜΑ Γ**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο

με κέντρο Κ και διάμετρο ΜΝ = 4 cm.

x cm

Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις

2

y cm

και

είναι εγγεγραμμένο στο

ημικύκλιο.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΑΛΑΙΟ**

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση

του x, είναι

E(x)  2 4x

2

 x , x (0, 2).

4

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν

του να γίνεται μέγιστο.

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να

είναι ίσο με

2

3 cm2 .

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση





f(x)  E(x)  2 3 e

x

, x  0, 2

( 2, 3)

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα

.

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**





  

2 2

Έστω f :



,



μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε









 

2 2

x   ,

να ισχύει:





x  f(x)  συνx 1.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι



συνx  1,

 

 2

x  0

 

 

 

2

x   , 0





f(x)  

x



0,



**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

**π**

**2**



**I** 

f(x)dx

**π**

**2**



**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο



  

2 2

διάστημα  ,

.







**Μονάδες 7**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΑΛΑΙΟ**

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

2

020 συνx  x  2020

  



έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα  ,

.







2 2

**Μονάδες 4**



  

2 2

**Δ5.** Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα  ,

με







F(0)  ρ, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος





  

2 2

**(Δ4)**. Να αποδείξετε ότι για κάθε x



 ,

ισχύει:







 | F(x) |  2 | x |.

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1**

**.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο**

**πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των**

**απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά

στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

**2**

**3**

**.**

**.**

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως

μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα**

**βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε

μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο

στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

**4**

**5**

**6**

**.**

**.**

**.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ **7** ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ **2000**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θέµα **1**ο

Α**.1 .** Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόµενα Α και Β ενός δειγµατικού

χώρου Ω ισχύει

Ρ**(**Α∪ Β**) =** Ρ**(**Α**) +** Ρ**(**Β**)**−Ρ**(**Α∩ Β**)**

Μονάδες **6,5**

Α**.2 .** Να συµπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

α**.** Ρ**(**Α∪ Β**) = …**

όταν τα Α **,** Β είναι ασυµβίβαστα

β**.** Ρ**(**Α΄**) = ….**

Όπου Α΄ είναι το συµπληρωµατικό του Α

Μονάδες **6**

Β**.**

∆

ίνεται ο δειγµατικός χώρος Ω **= {**ω **,** ω **,** ω **,** ω **,** ω **}** ενός

**1**

**2**

**3**

**4**

**5**

1

1

1

2

πειράµατος τύχης µε Ρ**(**ω**2) = ,** Ρ**(**ω **) =** Ρ**(**ω **) =**

**,** Ρ**(**ω**5) =**

**3**

**4**

4

24

α**.** Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράµµα που αντιστοιχεί στην

σωστή απάντηση

Η πιθανότητα Ρ**(**ω**1)** είναι

1

2

1

1

1

1

8

Α **:**

**,** Β **: ,** Γ **: ,** ∆ **:**

**,**

Ε **:**

6

3

12

Μονάδες **6,5**

β**.** ∆ίνονται τα ενδεχόµενα Α **={** ω **,** ω **,** ω **}** και Β**={** ω **,** ω **}**

**1**

**3**

**5**

**1**

**3**

του δειγµατικού χώρου Ω

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράµµα της στήλης Α και δίπλα τον

αριθµό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση

Στήλη Α

Στήλη Β

α**.** Ρ**(**Α∪ Β**)**

1

**1**

**2**

**3**

**4**

**.**

**.**

**.**

**.**

4

β**.** Ρ**(**Α∩ Β**)**

γ**.** Ρ**(**Α΄**)**

7

2

4

23

2

4

1

6

Μονάδες **6**

Θέµα **2**ο

**3**

**2**

∆

ίνεται η συνάρτηση **f(x) = 2x** −**3x** −**12x**−**7 ,** όπου **x** πραγµατικός

αριθµός

α**.** Να βρείτε την **f** ΄ **(x)**

Μονάδες **5**

β**.** Να βρείτε τα σηµεία της καµπύλης της συνάρτησης **f** στα οποία η

παράγωγος είναι **0**

Μονάδες **10**

γ**.** Να βρείτε τα ακρότατα της **f**

Μονάδες **10**

Θέµα **3**ο

Σε ένα κυκλικό διάγραµµα παριστάνεται το µορφωτικό επίπεδο των

**4**

**00** εργαζοµένων µίας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες **.**

Α΄ κατηγορία **:** Απόφοιτοι του γυµνασίου

Β΄ κατηγορία **:** Απόφοιτοι Λυκείου

Γ΄ κατηγορία **:** Πτυχιούχοι ανώτατης εκπαίδευσης

∆΄ κατηγορία **:** Κάτοχοι µεταπτυχιακού τίτλου

Κάθε εργαζόµενος ανήκει σε µία µόνο από τις παραπάνω κατηγορίες

Στη Α΄ κατηγορία ανήκει το **25%** των εργαζοµένων της επιχείρησης **.**

Η γωνία του κυκλικού τοµέα που αντιστοιχεί στους εργαζόµενους της

∆

΄ κατηγορίας είναι **18**ο **.**

Οι εργαζόµενοι της Β΄ κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζόµενων

της Γ΄ κατηγορίας **.**

α**.** Να υπολογίσετε τον αριθµό των εργαζοµένων κάθε κατηγορίας

Μονάδες **20**

β**.** Να µετατρέψετε το κυκλικό διάγραµµα σε ραβδόγραµµα

συχνοτήτων

Μονάδες **5**

Θέµα **4**ο

Στις **12** το µεσηµέρι η θερµοκρασία **(**σε βαθµούς κελσίου**)** δύο

πόλεων Α και Β το τελευταίο δεκαήµερο του Μαρτίου ήταν

Πόλη Α **: 20, 18, 20, 17, 18, 17, 16, 17, 16, 10**

Πόλη Β **: 18, 16, 17, 15, 16, 12, 16, 17, 20, 22**

α**.** Να βρείτε την µέση τιµή **,** την διάµεσο και την επικρατούσα τιµή

της θερµοκρασίας των πόλεων Α και Β

Μονάδες **9**

β**.** Αν η τυπική απόκλιση των θερµοκρασιών **(** σε βαθµούς κελσίου**)**

των πόλεων Α και Β είναι **S =2,66** και **S =2,59** αντίστοιχα **,** να

Α

Β

δικαιολογήσετε σε ποια από δύο πόλεις οι τιµές της θερµοκρασίας

έχουν µεγαλύτερη διασπορά

Μονάδες **6**

γ**.** Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερµόµετρο που

χρησιµοποιήθηκε για την µέτρηση της θερµοκρασίας στην πόλη Α **,**

παρουσίαζε λόγω κατασκευαστικού λάθους αυξηµένη θερµοκρασία

κατά **5** βαθµούς **.**

Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερµοκρασίες της πόλης Α **,** να βρείτε

σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιµές της θερµοκρασίας έχουν

µεγαλύτερη οµοιογένεια **.** Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας **.**

Μονάδες **10**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1.

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιµη σε ένα

διάστηµα

∆,

τότε

να

αποδείξετε

ότι:

′

(c⋅ f(x)) = c⋅ f′(x) , όπου c πραγµατικός αριθµός.

Μονάδες 6,5

Α.2.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν

γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή

Λάθος δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί σε κάθε

πρόταση.

′

α. (f(x) g(x)) f (x) g(x) f (x) g (x)

⋅

=

′

⋅

−

⋅

′

′

β. (f(g(x))) f (g(x))⋅g′(x)

=

′

′

⎛

f(x)

⎞

f′(x) ⋅g(x) g (x) ⋅ f(x)

+

′

γ. ⎜

⎟

=

, (g(x) ≠ 0)

(

g

(

x

)

)

2

⎝

g(x)⎠

ρ

′

ρ

-

1

δ

.

(

x

)

=

ρ

⋅

x

,

ρ

ρ

η

τ

ό

ς

,

x

>

0

ε. (ηµx)′ = συνx

στ. (συνx)′ = ηµx

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image475image476image477

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Β.1.

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράµµατα της

Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράµµα τον αριθµό της

Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α

Συνάρτηση f

Στήλη Β

Πρώτη παράγωγος της f

1 1

α. 2 x + ln2 , x > 0

1

.

+

x 2

ηµx

2. 3συν3x

β.

,

x ≠ 0

x

γ. ηµ3x

ηµx − xσυνx

3

.

.

x2

1

x

4

xσυνx − ηµx

5.

x2

6. –3συν3x

Μονάδες 7,5

1

−

4

′

=

Β.2.

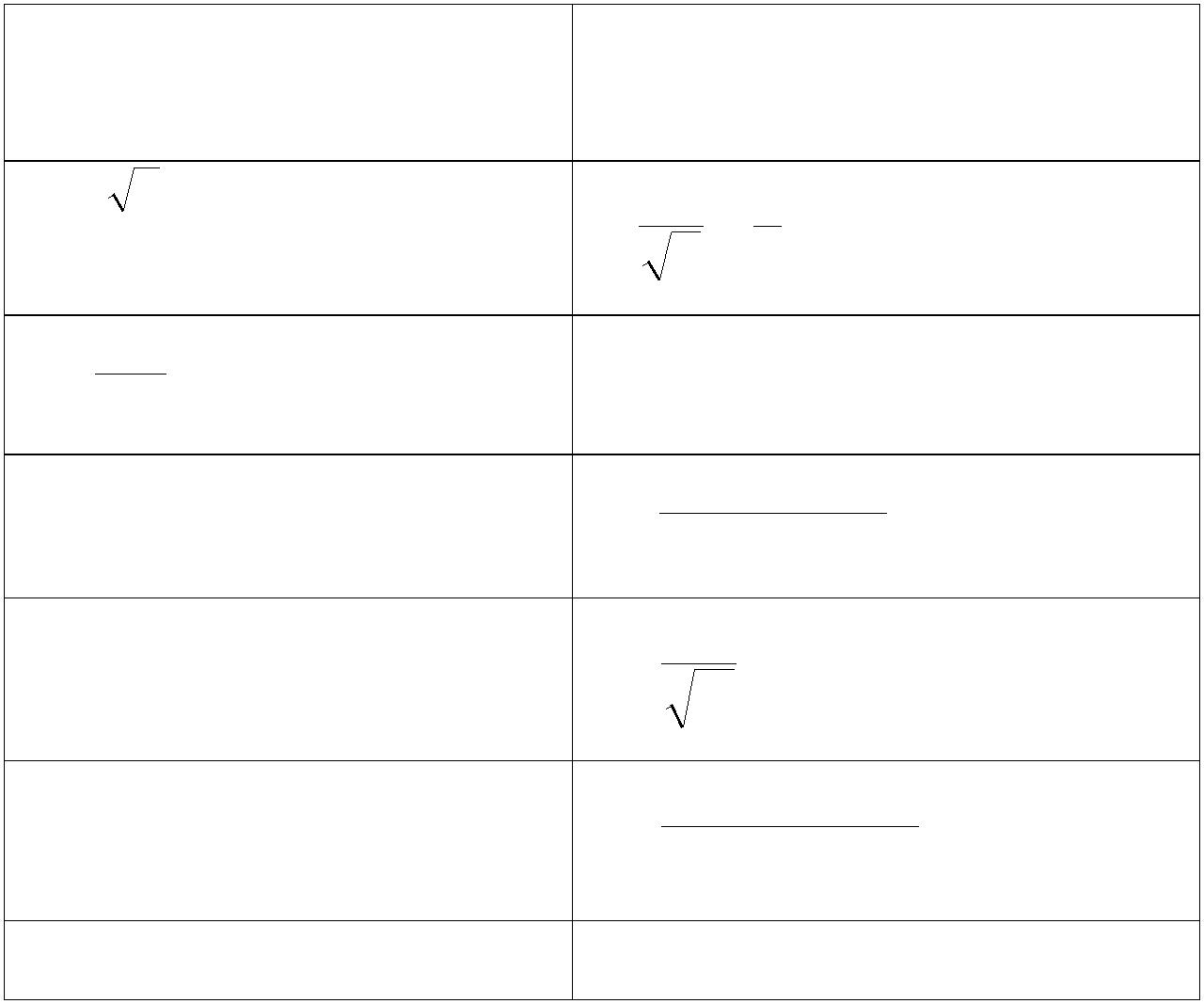
Αν f(x)= (x 1) και f (α) 27 , όπου α πραγµατικός

4

αριθµός, τότε να βρείτε την τιµή του α.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image479image481

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι

Τιµές

Πλήθος

θερµοκρασίες των 20 πρώτων Θερµοκρασίας Ηµερών

ηµερών του Μαΐου σε βαθµούς

Κελσίου (οC).

Α. Αν γνωρίζουµε ότι η µέση

θερµοκρασία των παραπάνω

ηµερών είναι 24,4 οC, τότε:

α. να βρείτε πόσες ηµέρες είχαν

xi

vi

2

4

22

23

24

2

2

2

5

6

7

2

3

θερµοκρασία

πόσες 25 οC

24 οC

και

Μονάδες 10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιµή και τη διάµεσο.

Μονάδες 5

ο

Β. Αν γνωρίζουµε ότι η διάµεσος είναι 24,5 C, να βρείτε

ο

ο

πόσες ηµέρες είχαν θερµοκρασία 24 C και πόσες 25 C.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

To βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών µιας

πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον

1

1 κιλά αλλά µικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουµε ότι 8

επιβάτες έχουν αποσκευές µε βάρος µικρότερο από 14 κιλά,

το 30% των επιβατών έχει αποσκευές µε βάρος µικρότερο

από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές µε βάρος

µικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει

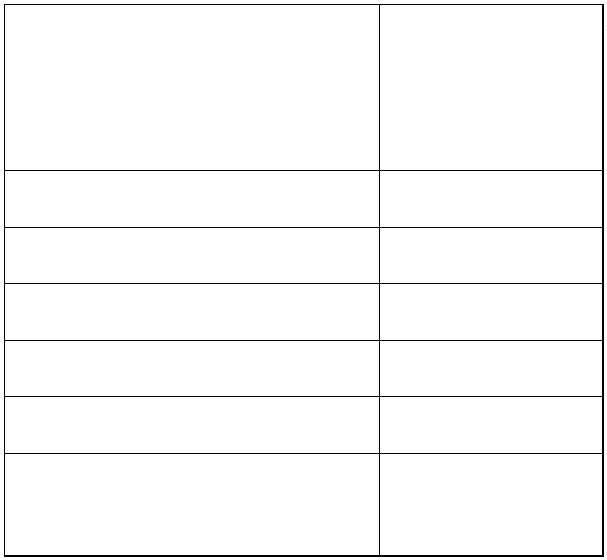
αποσκευές µε βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α. Να παρασταθούν τα δεδοµένα σε έναν πίνακα

συχνοτήτων.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image482image483

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να µεταφέρει αποσκευές µε

βάρος µικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει

πρόσθετη οικονοµική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό

από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη

οικονοµική επιβάρυνση.

Μονάδες 7

γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τοµέων

του κυκλικού διαγράµµατος σχετικών συχνοτήτων, για

τα δεδοµένα του προβλήµατος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα σχολείο µε 400 µαθητές διδάσκονται η αγγλική και η

γαλλική γλώσσα. Κάθε µαθητής είναι υποχρεωµένος να

παρακολουθεί τουλάχιστον µία από τις παραπάνω ξένες

γλώσσες. Από τους παραπάνω µαθητές 340 παρακολουθούν

την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα.

Επιλέγουµε τυχαία ένα µαθητή. ΄Εστω Α το ενδεχόµενο να

παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί

τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόµενα Α και Γ είναι

ασυµβίβαστα.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι:

3

Ρ(Γ-Α)≤

5

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο µαθητής να παρακολουθεί

µόνο την αγγλική γλώσσα.

Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο µαθητής να παρακολουθεί

µία µόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

image485image486image487

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε µία συνάρτηση µε πεδίο ορισµού Α λέγεται

σ

υ

ν

ε

χ

ή

ς

;

Μονάδες 4

A2. Πότε µία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα

δ

ι

ά

σ

τ

η

µ

α

∆

τ

ο

υ

π

ε

δ

ί

ο

υ

ο

ρ

ι

σ

µ

ο

ύ

τ

η

ς

κ

α

ι

π

ό

τ

ε

γ

ν

η

σ

ί

ω

ς

φ

θ

ί

ν

ο

υ

σ

α

;

Μονάδες 4

Α3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής

συνάρτησης f(x)=x είναι f΄(x)=1.

Μονάδες 10

Β1. Σε µια κατανοµή συχνοτήτων οι τιµές της µεταβλητής

είναι x , x ,...,x µε συχνότητες ν , ν ,...,ν αντίστοιχα

1

2

k

1

2

k

και ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Πώς ορίζεται η µέση τιµή x ;

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείµενο που

ακολουθεί συµπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.

Ε

ά

ν

σ

ε

κ

ά

θ

ε

τ

ι

µ

ή

x

,

x

,

.

.

.

,

x

ε

ν

ό

ς

σ

υ

ν

ό

λ

ο

υ

δ

ε

δ

ο

µ

έ

ν

ω

ν

δ

ώ

σ

ο

υ

µ

ε

1

2

ν

δ

ι

α

φ

ο

ρ

ε

τ

ι

κ

ή

β

α

ρ

ύ

τ

η

τ

α

π

ο

υ

ε

κ

φ

ρ

ά

ζ

ε

τ

α

ι

µ

ε

τ

ο

υ

ς

σ

υ

ν

τ

ε

λ

ε

σ

τ

έ

ς

σ

τ

ά

θ

µ

ι

σ

η

ς

(

β

α

ρ

ύ

τ

η

τ

α

ς

)

w

,

w

,

.

.

.

,

w

τ

ό

τ

ε

α

ν

τ

ί

τ

ο

υ

α

ρ

ι

θ

µ

η

τ

ι

κ

ο

ύ

1

2

ν

µέσου χρησιµοποιούµε τον .................. .................. µέσο ή ..................

µέσο που βρίσκεται από τον τύπο x = .................. .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση f(x)=αx(2-x), α∈ΙR.

∆

Α.

Να βρείτε την τιµή του α ώστε η εφαπτοµένη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σηµείο

τ

η

ς

Ο

(

0

,

f

(

0

)

)

ν

α

σ

χ

η

µ

α

τ

ί

ζ

ε

ι

µ

ε

τ

ο

ν

ά

ξ

ο

ν

α

x

΄

x

γ

ω

ν

ί

α

4

5°.

Μονάδες 10

Β.

Γ

ι

α

α

=

1

/

2

,

ν

α

β

ρ

ε

ί

τ

ε

:

α. την εξίσωση της εφαπτοµένης της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης f στο σηµείο της (1, f(1)).

Μονάδες 5

β. τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήµα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών

σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθµολογία µίας

ο

µ

ά

δ

α

ς

µαθητών

σ

τ

ο

µάθηµα της Ιστορίας. Η

βαθµολογία κυµαίνεται από

1

0 µέχρι 20. ∆ίνεται ότι 10

µαθητές έχουν βαθµό

µεγαλύτερο ή ίσο του 12 και

µικρότερο του 14.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθµός των µαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τη διάµεσο.

Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραµµα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

δ. Επιλέγουµε τυχαία από το δείγµα των 50 µαθητών

ένα µαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο µαθητής να

έχει βαθµό µεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Ω={1, 2, 3, 6} δειγµατικός χώρος.

Α.

Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους µπορούν

να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την

πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχοµένου k του Ω.

1

2k

1

k

1

i) P(k)=

ii) Ρ(k)=

iii) P(k)=

2k

Μονάδες 8

Β.

Οι παρατηρήσεις µιας µεταβλητής

ακόλουθες:

Χ

ε

ί

ν

α

ι

ο

ι

1

, 1, 7, k, k, 3, 3, 3

ό

π

ο

υ

k

ε

ί

ν

α

ι

σ

τ

ο

ι

χ

ε

ι

ώ

δ

ε

ς

ε

ν

δ

ε

χ

ό

µ

ε

ν

ο

τ

ο

υ

Ω

,

µ

ε

1

π

ι

θ

α

ν

ό

τ

η

τ

α

P

(

k

)

=

.

2k

∆

ί

ν

ο

ν

τ

α

ι

τ

α

ε

ν

δ

ε

χ

ό

µ

ε

ν

α

Α

,

Β

τ

ο

υ

δ

ε

ι

γ

µ

α

τ

ι

κ

ο

ύ

χ

ώ

ρ

ο

υ

Ω

,

ό

π

ο

υ

Α={k∈Ω : η επικρατούσα τιµή των παρατηρήσεων της

µεταβλητής Χ είναι Μ0=3} και

Β

=

{

k

∈

Ω

:

η

µ

έ

σ

η

τ

ι

µ

ή

x

=

2

,

5

}

.

α. Να παρασταθούν µε αναγραφή τα ενδεχόµενα Α και Β.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B) και P(Α∪Β).

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για δύο συµπληρωµατικά ενδεχόµενα Α και Α΄ ενός

δειγµατικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει :

Ρ ( Α΄ ) = 1 – Ρ ( Α )

Μονάδες 9

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράµµα που αντιστοιχεί στη

σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιµη σε ένα σηµείο x0 του

πεδίου ορισµού της, αν υπάρχει το :

f(x0 + h)− f(h)

α. lim

, h ∈ R , h ≠ 0 και το όριο αυτό

h→0

h

είναι πραγµατικός αριθµός

f(x − h)− f(x )

β. lim

, h ∈ R , h ≠ 0

0

0

h→0

h

f(x + h)− f(x )

γ. lim

, h ∈ R , h ≠ 0 και το όριο αυτό

0

0

h→0

h

είναι πραγµατικός αριθµός

f(x0 + h)+ f(h)

δ. lim

, h ∈ R , h ≠ 0 .

h→0

h

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράµµα που αντιστοιχεί στη

σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδοµένων είναι :

α. το εύρος

β. η διάµεσος

γ. η διακύµανση

δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 5

∆

. Να ορίσετε το συντελεστή µεταβολής ενός συνόλου

παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση f(x)

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισµού της.

∆

=

x 1

2 −

.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθµός µεταβολής της f, όταν x=3, ισούται µε

3

2

.

4

Μονάδες 10

f(x)− 3

x − 2

γ. Αν h(x) =

για x ≠ 2, να υπολογίσετε το lim h(x) .

x→2

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έχουµε 30 σφαίρες µέσα σ’ ένα δοχείο, αριθµηµένες από το 1 έως το

0. Επιλέγουµε στην τύχη µία σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόµενο ο

3

αριθµός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόµενο ο αριθµός

αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Αν Α΄, Β΄ είναι τα συµπληρωµατικά ενδεχόµενα των Α και Β

αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. Ρ(Α) , P (B)

β. Ρ(Α ∪ Β)

γ. Ρ(Α ∪ Β΄)

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Μονάδες 6

Μονάδες 7

δ.

P((A΄ ∩ Β)∪ (Α ∩ Β΄))

ΘΕΜΑ 4ο

Το βάρος ενός δείγµατος µαθητών λυκείου ακολουθεί

κανονική ή περίπου κανονική κατανοµή.

Το 50% των µαθητών του δείγµατος έχουν βάρος το πολύ

6

5 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg

έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη µέση τιµή, τη διάµεσο και την τυπική

απόκλιση του βάρους των µαθητών του δείγµατος.

Μονάδες 6

β. Να εξετάσετε αν το δείγµα είναι οµοιογενές.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των µαθητών του δείγµατος,

που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Μονάδες 6

δ. Ο αριθµός των µαθητών του δείγµατος αυτού που έχουν

βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το

σύνολο των µαθητών του δείγµατος.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόµενους)

1

. Στο τετράδιο να γράψετε µόνο τα προκαταρκτικά (ηµεροµηνία,

εξεταζόµενο µάθηµα). Τα θέµατα να µην τα αντιγράψετε στο

τετράδιο. Τα σχήµατα που θα χρησιµοποιήσετε στο τετράδιο

µπορούν να γίνουν και µε µολύβι.

2

. Να γράψετε το ονοµατεπώνυµό σας στο πάνω µέρος των

φωτοαντιγράφων αµέσως µόλις σας παραδοθούν. Καµιά άλλη

σηµείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε µαζί µε το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα

καταστραφούν µετά το πέρας της εξέτασης

3

4

5

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέµατα.

. Κάθε λύση επιστηµονικά τεκµηριωµένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες µετά τη διανοµή των

φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης µετά τη 10:00 πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόµενα ενός δειγµατικού χώρου Ω µε

Α⊆Β, τότε να αποδείξετε ότι Ρ(Α) ≤ Ρ(Β).

Μονάδες 7

Β. α. Πότε ένα πείραµα ονοµάζεται πείραµα τύχης;

β. Να δώσετε τον ορισµό του δειγµατικού χώρου ενός

πειράµατος τύχης.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α.

Αν lim f(x) = A

και

lim g(x) = A ,

2

1

x → x

x → x

0

0

τότε

lim (f(x)⋅ g(x)) = A A .

1 2

x → x0

β. Μία συνάρτηση f µε πεδίο ορισµού Α λέµε ότι

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x ∈A, όταν

1

f(x)≤f(x ) για κάθε x σε µια περιοχή του x .

1

1

γ. Ισχύει (f(x)⋅g(x))΄ = f΄(x)⋅g(x) + g΄(x)⋅f(x), όπου f και

g παραγωγίσιµες συναρτήσεις.

δ. Ισχύει ( x)΄ =

1

µε x > 0 .

x

ε. Για δύο συµπληρωµατικά ενδεχόµενα Α και Α΄ ενός

δειγµατικού χώρου Ω ισχύει Ρ(Α΄) = 1 + Ρ (Α).

στ. Το µέτρο διασποράς εύρος ισούται µε τη διαφορά της

ελάχιστης παρατήρησης από τη µέγιστη παρατήρηση.

Μονάδες 12

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση f µε τύπο f(x) =

x+ 2

ex

∆

.

α. Να βρείτε τη µονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Μονάδες 9

1

ex

β. Να αποδείξετε ότι f(x) + f ΄(x) =

.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτοµένης της γραφικής

παράστασης της f στο σηµείο Α (0, f(0)).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Η µέση τιµή των βαθµών που πήραν οι 25 µαθητές της Γ΄ τάξης ενός

Λυκείου στα Μαθηµατικά είναι 14, ενώ η µέση τιµή των βαθµών των

10 µαθητών που παρουσίασαν τη µικρότερη βαθµολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη µέση τιµή της βαθµολογίας των 15 υπόλοιπων

µαθητών.

Μονάδες 12

β. Αν το άθροισµα των τετραγώνων των βαθµών των 25 αυτών

µαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή µεταβολής (CV).

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγµατικός χώρος της ρίψης ενός µη

αµερόληπτου ζαριού και η συνάρτησηf:IR→IR µε τύπο

1

3

f(x) = x – kx + 4x + 2 , όπου k∈Ω.

3

2

Αν P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6), τότε να βρείτε:

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχοµένων P(1), P(2), P(3), P(4),

P(5), P(6).

Μονάδες 8

β. Τις πιθανότητες των ενδεχοµένων Α και Β, όπου

Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθµός»

Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθµός».

Μονάδες 8

γ. Την πιθανότητα του ενδεχοµένου Γ, όπου

Γ: «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στοIR» .

Μονάδες 9

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιο να γράψετε µόνο τα προκαταρκτικά (ηµεροµηνία,

εξεταζόµενο µάθηµα). Τα θέµατα να µην τα αντιγράψετε στο

τετράδιο. Τα σχήµατα που θα χρησιµοποιήσετε στο τετράδιο

µπορούν να γίνουν και µε µολύβι.

2

. Να γράψετε το ονοµατεπώνυµό σας στο πάνω µέρος των

φωτοαντιγράφων, αµέσως µόλις σας παραδοθούν. Καµιά άλλη

σηµείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε µαζί µε το τετράδιο και

τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν µετά το

πέρας της εξέτασης.

3

4

5

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέµατα.

. Κάθε λύση επιστηµονικά τεκµηριωµένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες µετά τη διανοµή των

φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.1.

∆ίνονται οι συναρτήσεις

F(x) = f(x)+g(x).

F(x), f(x) και g(x) με

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να

αποδείξετε ότι: F΄(x) = f΄(x) + g΄(x).

Μονάδες 9

A.2.

Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής

μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x, αν x− > 0 και πώς,

αν x− < 0 ;

Μονάδες 4

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή

απάντηση.

α. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές

και συνεχείς.

Μονάδες 2

1

x

β. Αν x>0, τότε (lnx)΄=

.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός

από τις συχνότητες f και v , χρησιμοποιούνται και οι

i

i

λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F , N .

i

i

Μονάδες 2

δ. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής

είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.

Μονάδες 2

ε. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού

χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει

Ρ(Α)=Ρ(Β), τότε είναι πάντοτε Ν(Α)=Ν(Β).

Μονάδες 2

στ. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται

μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

∆

ίνεται η συνάρτηση f(x) = αlnx - βx2 με α, β ∈ R .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x, το οποίο

ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα α και β, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο

Α(1,1) της γραφικής παράστασης της f να είναι y=3x-2 .

Μονάδες 10

lim

x→2

(f΄(x)·x3).

δ. Να βρείτε το

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 3o

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των

παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των

παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του

διαστήματος

χαρακτηριστικές

τιμές

της

κανονικής

\_

−

−

−

κατανομής x ± 3s, x ± 2s, x ± s, x.

α. Να δείξετε ότι x− = 20 και s = 2 .

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το α∈Ν\*, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα

\_

−

(x− α⋅ s, x+ α⋅s) ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την

R

2

2

−

ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f(x)=

x − (x+ 4) x+ 9s .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} με

ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του

Ω είναι

AU B = {1,2,3,4,5,6}, AI B = {1,3,4}, A -B = {2,6} και

⎧

⎩

x+1

x-1

⎫

⎭

Γ = x∈ Ω /

≥ 2 .

⎬

⎨

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Γ).

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το

Β και όχι το Γ.

Μονάδες 3

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί

μόνο ένα από τα Β και Γ.

Μονάδες 3

2

∈

δ. Αν s είναι η διακύμανση των τιμών λ, 3λ, 5λ, όπου λ Ω, να

βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου ∆ = {λ∈Ω / s2 > 24}.

Μονάδες 10

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε

τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν

επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι

αποδεκτή.

5

6

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την 10.30΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

∆

ΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός

δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει:

P(Α΄) =1–Ρ(Α).

Μονάδες 9

Β.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x0∈A;

Μονάδες 3

Β.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα

διάστημα ∆;

Μονάδες 3

Γ.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή

απάντηση.

α. Το ενδεχόμενο Α∪Β πραγματοποιείται, όταν

πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα

Α και Β.

Μονάδες 2

β. Ισχύει: (συνx)΄ =ημx, για κάθε x ∈IR.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ.

Ο

σ

υ

ν

τ

ε

λ

ε

σ

τ

ή

ς

μ

ε

τ

α

β

λ

η

τ

ό

τ

η

τ

α

ς

(CV)

ε

ί

ν

α

ι

α

ν

ε

ξ

ά

ρ

τ

η

τ

ο

ς

α

π

ό

τ

ι

ς

μ

ο

ν

ά

δ

ε

ς

μ

έ

τ

ρ

η

σ

η

ς

τ

ω

ν

δ

ε

δ

ο

μ

έ

ν

ω

ν

.

Μονάδες 2

δ. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 2

ε. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Τότε ισχύει: P(∅) ≤ P(A∪B) ≤ P(Ω).

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση f(x) = e (αx +βx+9) με α,βIR.Αν η

x

2

∈

∆

ε

φ

α

π

τ

ο

μ

έ

ν

η

τ

η

ς

γ

ρ

α

φ

ι

κ

ή

ς

π

α

ρ

ά

σ

τ

α

σ

η

ς

τ

η

ς

σ

υ

ν

ά

ρ

τ

η

σ

η

ς

f

σ

τ

ο

2

2

2

σ

η

μ

ε

ί

ο

τ

η

ς

Α

(

2

,

e

)

ε

ί

ν

α

ι

y

=

–

e

x

+

3

e

,

τ

ό

τ

ε

:

α. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=–6.

Μονάδες 12

Μονάδες 13

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ 3o

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους

πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η

πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο

καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην

έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει

και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει

πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι

ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο

στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των

ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου

κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο –

Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις

κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω

πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών Κέντρο κλάσης Σχετική συχνότητα

xi

...

...

...

10

fi

0,1

...

0,3

...

[

[

[

[

... – ... )

... – 7 )

... – ... )

... – ... )

Σύνολο

///////////////////////

1

η

ς

Α

ν

ε

π

ι

π

λ

έ

ο

ν

δ

ί

ν

ε

τ

α

ι

ό

τ

ι

η

σ

χ

ε

τ

ι

κ

ή

σ

υ

χ

ν

ό

τ

η

τ

α

τ

η

ς

4

κ

λ

ά

σ

η

ς

η

ς

f είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της 2 κλάσης f ,

τότε:

4

2

α.

β.

Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται

με 2.

Μονάδες 10

Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών

συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε

τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή x.

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s.

Μονάδες 4

Μονάδες 6

⎡

k

2 ⎤

(

x ν

)

i i

∑

⎢

⎥

1

ν

k

2

2

∆

ί

ν

ε

τ

α

ι

ο

τ

ύ

π

ο

ς

:

s = ∑x ν – i=1

⎢

i i

.

⎥

ν

⎢

i=1

⎥

⎣

⎦

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο

μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη

σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

5

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

A.

Ν

α

α

π

ο

δ

ε

ί

ξ

ε

τ

ε

ό

τ

ι

η

π

α

ρ

ά

γ

ω

γ

ο

ς

τ

η

ς

σ

υ

ν

ά

ρ

τ

η

σ

η

ς

f(x)=x είναι f΄(x)=1.

Μονάδες 8

Β. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός

ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

Μονάδες 4

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω

πιθανοτήτων:

i) Ρ(Ω)

ii) Ρ(∅).

Μονάδες 3

Γ1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε

πρόταση.

α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και ότι

fi , i=1,2,…,κ, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες

των τιμών x μιας μεταβλητής. Αν α είναι το

i

i

α

ν

τ

ί

σ

τ

ο

ι

χ

ο

τ

ό

ξ

ο

ε

ν

ό

ς

κ

υ

κ

λ

ι

κ

ο

ύ

τ

μ

ή

μ

α

τ

ο

ς

σ

τ

ο

κ

υ

κ

λ

ι

κ

ό

δ

ι

ά

γ

ρ

α

μ

μ

α

σ

υ

χ

ν

ο

τ

ή

τ

ω

ν

,

τ

ό

τ

ε

:

α

=

3

6

0

⋅

f

,

γ

ι

α

i

=

1

,

2

,

…

,

κ

.

i

i

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

β. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με g(x)≠0,

΄

⎡

⎤ ΄

f (x)⋅g(x) − f (x)⋅g΄(x)

f (x)

τ

ό

τ

ε

ι

σ

χ

ύ

ε

ι

=

.

⎢

⎥

⎣

g(x)⎦

( )2

g(x)

Μονάδες 2

γ. Aν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα

διάστημα ∆ και ισχύει f΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό

σημείο του ∆, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο ∆.

Μονάδες 2

Γ2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των

παρακάτω συναρτήσεων:

f (x)=ex

1

ό

π

ο

υ

x

π

ρ

α

γ

μ

α

τ

ι

κ

ό

ς

.

1

x

f2(x)=

ό

π

ο

υ

x

≠

0

.

f3(x)=ημx

ό

π

ο

υ

x

π

ρ

α

γ

μ

α

τ

ι

κ

ό

ς

.

f4(x)=c

ό

π

ο

υ

x

π

ρ

α

γ

μ

α

τ

ι

κ

ό

ς

κ

α

ι

c

σ

τ

α

θ

ε

ρ

ά

.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=

x

.

∆

x2 − x +1

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί το όριο lim f (x) .

x→−1

Μονάδες 8

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία και

να βρεθούν τα ακρότατά της.

Μονάδες 12

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 3o

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = {1, 2, 3, 4, 5}. Θεωρούμε τα

ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

Α = {x∈Ω/ 0 ≤ ℓn(x−1) < ℓn3},

B = {x∈Ω/ (x 5x)⋅(x−1)= 6 (x 1)}.

2

−

−

⋅

−

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες Ρ(Α−Β) και Ρ(Β∪Α΄).

Μονάδες 8

1

β. Αν Ρ(Α) = , να υπολογιστεί η πιθανότητα Ρ(Α΄∪Β΄).

4

Μονάδες 7

1

4

1

γ. Αν Ρ(Α) =

κ

α

ι

Ρ

(

Β

−

Α

)

=

,

ν

α

β

ρ

ε

θ

ε

ί

η

μ

ι

κ

ρ

ό

τ

ε

ρ

η

κ

α

ι

η

8

μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας Ρ(X), όπου Χ είναι ενδεχόμενο

του Ω τέτοιο ώστε Α∪Χ=Β.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Έ

σ

τ

ω

x

,

x

,

.

.

.

,

x

έ

ν

α

δ

ε

ί

γ

μ

α

μ

ε

π

α

ρ

α

τ

η

ρ

ή

σ

ε

ι

ς

:

1

2

11

7

, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3,

όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με α<β<γ. ∆ίνεται ότι η μέση

τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι

x = 6, δ = 6 και R = 8 αντίστοιχα.

α.

Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει

α + β + γ = 217.

2

2

2

Μονάδες 8

β.

Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο

προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική

5

8

1

απόκλιση του δείγματος είναι ίση με sx=

εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

κ

α

ι

ν

α

1

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ.

Έ

σ

τ

ω

y

,

y

,

…

,

y

ο

ι

π

α

ρ

α

τ

η

ρ

ή

σ

ε

ι

ς

π

ο

υ

π

ρ

ο

κ

ύ

π

τ

ο

υ

ν

1

2

11

α

ν

π

ο

λ

λ

α

π

λ

α

σ

ι

ά

σ

ο

υ

μ

ε

τ

ι

ς

x

,

x

,

…

,

x

ε

π

ί

μ

ι

α

θ

ε

τ

ι

κ

ή

1

2

11

σ

τ

α

θ

ε

ρ

ά

c

κ

α

ι

σ

τ

η

σ

υ

ν

έ

χ

ε

ι

α

π

ρ

ο

σ

θ

έ

σ

ο

υ

μ

ε

μ

ι

α

1

σ

τ

α

θ

ε

ρ

ά

c

.

A

ν

y

=

9

κ

α

ι

s

=

2

s

,

ν

α

β

ρ

ε

θ

ο

ύ

ν

ο

ι

τ

ι

μ

έ

ς

τ

ω

ν

2

y

x

σ

τ

α

θ

ε

ρ

ώ

ν

c

κ

α

ι

c

.

1

2

Μονάδες 9

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην

αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά

άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με

μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο

για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5

6

7

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι

αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 1 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1o

A. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο

των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

(f(x) + g(x))′ = f′(x) + g′(x).

Μονάδες 9

B. α. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των

παρατηρήσεων t , t , …, t μιας μεταβλητής X.

1

2

ν

Μονάδες 3

β. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας

μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής

μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης

σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της

παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x όριο έναν πραγματικό

0

αριθμό A , δηλαδή αν lim f(x)= A ,

τότε

1

1

x→xo

lim (f(x))ν = A1ν (ν θετικός ακέραιος).

x→x

o

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα

διάστημα ∆ και ισχύει f′(x) < 0 για κάθε εσωτερικό

σημείο του ∆, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο ∆.

Μονάδες 2

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη

γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής

μεταβλητής.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ

είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου

πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις

Κεντρικές τιμές

Συχνότητα Σχετική συχνότητα

[

– )

νi

xi

fi

2

4

6

8

0 – 40

0 – 60

0 – 80

0 – 100

Σύνολα

∆

ίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν

βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών

που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα

των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την

επίδοση από 80 έως 100 είναι 108ο.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

1

5

3

α. Να δείξετε ότι f = f =

, f3 =

, f4 =

.

1

2

1

0

10

10

Μονάδες 10

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα

συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Μονάδες 5

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν

βαθμολογία τουλάχιστον 60.

Μονάδες 5

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν

βαθμολογία από 50 έως 70.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3o

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω

και p ένας πραγματικός αριθμός με 0 < p < 1. ∆ίνεται ότι οι

πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Α∪Β) και Ρ(Α∩Β) είναι ανά δύο

διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία

συνόλου

του

2

3

{

p – 1, p, p +1, p , p }.

2

∪

∩

3

α. Να δείξετε ότι Ρ(Α) = p , Ρ(Α Β) = p και Ρ(Α Β) = p .

Μονάδες 9

3

2

β. Να αποδείξετε ότι Ρ(Β) = p – p + p.

Μονάδες 8

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι Ρ(Β – Α) > Ρ(Α – Β).

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια

ορθογώνια περιοχή από τις

τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η

τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου

που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

Σχήμα 1

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που

περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

1

2

f(x) = 100x – x .

2

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα

μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των

2

00 m.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών f′(100), f′(101),

f′(102), f′(103) και f′(104).

Μονάδες 5

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών f′(100),

f′(101), f′(102), f′(103) και f′(104) και CV′ ο συντελεστής

μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από

τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου c ≠ 2. Να

υπολογίσετε τo c, έτσι ώστε να ισχύει CV′ = 2CV.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία,

εξεταζόμενο

μάθημα).

Να

μην

αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με

μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι

μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5

6

7

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι

αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1o

A. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα

Α και Α′ ενός δειγματικού χώρου, ισχύει

Ρ(Α′)=1−Ρ(Α)

Μονάδες 9

B. α. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε

λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x1∈A;

Μονάδες 3

β. Αν t , t , ..., t είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής

1

2

ν

X σε δείγμα μεγέθους ν, να ορίσετε τη μέση τιμή x−

των παρατηρήσεων.

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f έχει στο x όριο έναν πραγματικό

0

αριθμό A, δηλαδή αν lim f (x) = A τότε για κάθε

x→x

0

φυσικό αριθμό ν μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει

lim (f (x))ν = νAν−

1

x→x

0

Μονάδες 2

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

x

∈

′

x

β. Για τη συνάρτηση f(x) = e , x , ισχύει f (x) = e

Μονάδες 2

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η

τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων

είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των

παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Μονάδες 2

δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό

είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική

απόκλιση s και εύρος R, τότε ισχύει s ≈6R

Μονάδες 2

ε. O δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης

λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

ίνεται η συνάρτηση f(x) = αx 8, όπου α ένας πραγματικός

3

−

∆

αριθμός.

α. Αν lim f (x) = −7, να βρεθεί η τιμή του α

x→1

Μονάδες 5

β. Έστω α=1

f (x)

x − 2

i. Να βρεθεί το όριο lim

x→2

Μονάδες 10

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x0 = 2

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ 3o

Έστω x , x , x , x οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος

1

2

3

4

μεγέθους ν=72 με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ν , ν ,

1

2

ν , ν , όπου ν = 3ν . ∆ίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού

3

4

4

3

διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x

και x2 είναι αντίστοιχα 50° και 30°.

1

α. Να βρεθούν οι συχνότητες νi, i=1,2,3,4

Μονάδες 10

β. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x3 και x4

Μονάδες 8

γ. ∆ίνεται ότι x <−7, x =−7, x = 3, και x >3. Να δειχθεί ότι

1

2

3

4

1

0 R+72 x− =52 δ

όπου R, x− , δ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η

διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

ίνεται η συνάρτηση f (x) = ν3x +

4

x2

∆

, x∈(0,1), όπου ν

ακέραιος αριθμός με ν >2

A. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι

γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι

γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 8

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και

2

∈

να δειχθεί ότι f(x) ≥ 3ν για κάθε x (0,1)

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

B. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο Ω = {1, 2, ..., ν} με

ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, Α για

το οποίο ισχύει

4

ν3 P(A) +

= 3ν και Ν(Α)=ν −9ν−8

2

2

(P(A))2

όπου Ρ(Α) είναι η πιθανότητα του Α και Ν(Α) το

πλήθος των στοιχείων του Α

1

α. Να δείξετε ότι Ρ(Α) =

5

Μονάδες 7

β. Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού

1

χώρου Ω με Ρ(Α∩Β) = , να υπολογιστεί η πιθανότητα

6

του ενδεχομένου Α′∪Β

Μονάδες 5

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

1

2

(ημερομηνία,

εξεταζόμενο

μάθημα).

Να

μην

αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το

τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο

στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης.

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια,

διαγράμματα και πίνακες.

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

5

6

7

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι

αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

∆

ΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα

′

και c∈R, να αποδείξετε ότι (cf(x)) = cf (x), x ∆.

′

∈

∆

Μονάδες 9

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα

διάστημα ∆ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

Α3. Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος

τύχης;

Μονάδες 3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας

στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε

πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος,

αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α,

f

τότε η συνάρτηση

έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α

g

β) Ισχύει lim (συνx)= συνx

0

x→x

0

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι

διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ

τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους

το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο

σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με

το μέγεθος ν του δείγματος.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ε) Αν Ρ(Α) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου

Α= {α , α , ..., α } ≠ «, τότε

1

2

κ

Ρ(Α) = Ρ(α )+ Ρ(α )+ ... + Ρ(α )

1

2

κ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ B

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών

κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5

κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

•

Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην

κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144ο

Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι

ίσες.

•

•

•

48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και

6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω

πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΣΧΕΤΙΚΗ

ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

ΣΧΕΤΙΚΗ

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ

ΤΙΜΗ xi

[

- )

νi

f

fi %

i

ΣΥΝΟΛΟ

Μονάδες 10

−

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή x της βαθμολογίας των

μαθητών.

Μονάδες 6

B3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10

έως 14

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν

βαθμολογία τουλάχιστον 17

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω Ω = {ω , ω , ω , ω } ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης

1

2

3

4

και τα ενδεχόμενά του Α= {ω , ω } και Β= { ω , ω }

1

3

2

4

ν +1

ν + 4

ν −1

2ν

Αν είναι Ρ(Α–Β) =

και Ρ(Β–Α) =

όπου ν θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι Ρ(Α–Β) = Ρ(Α) και Ρ(Β–Α) = Ρ(Β)

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ν=4

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α

και Β

Μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Α΄»B΄

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ ∆

Έστω t ,t , ... ,t οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής

1

2

ν

−

Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή x και

τυπική απόκλιση s

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

3

⎛

⎞

1

−

f (t)

=

⎜t − x⎟ , t ∈R και s ≠ 0

⎜

⎟

3

00s2 ⎝

⎠

∆

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως

αύξουσα.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

∆

∆

2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται

ελάχιστος για t = x− και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Μονάδες 6

3. Αν f΄(0)=1, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των

παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι

ομοιογενές.

Μονάδες 8

∆

4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών f΄(t ), f΄(t ), ... , f΄(t )

1

2

ν

1

είναι ίση με

1

00

Μονάδες 6

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο

τετράδιο

να

γράψετε

μόνο

τα

προκαταρκτικά

(ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα

θέματα στο τετράδιο.

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη

σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο

και τα φωτοαντίγραφα.

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό

διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να

χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και

πίνακες.

5

6

7

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

8

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 9:30 π.μ.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω

να αποδείξετε ότι:

P(A UB)=P(A)+P(B)-P(A IB)

Μονάδες 7

Α2. Έστω ένας δειγματικός χώρος Ω={ω , ω , . . . , ω } με

1

2

ν

πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον

αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε

ένα σημείο x0 του πεδίου ορισμού της Α;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας

στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε

πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος,

αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1

α) Αν x>0, τότε ( x)′=

x

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα

και ισχύει f ′(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του ∆, τότε

∆

η f είναι γνησίως αύξουσα στο ∆.

γ) Η αθροιστική συχνότητα Νi μίας κατανομής εκφράζει το

πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της

τιμής xi.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των

παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (x – s, x + s),

όπου x η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

ε) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, οι οποίες

έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η

μεσαία παρατήρηση.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ B

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε o C) σε μια περιοχή

κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις

τιμές της συνάρτησης θ(t)=t–4 t +α, όπου α∈ και t∈(0,24]

ο χρόνος σε ώρες.

Β1. Να αποδείξετε ότι για t∈(0,4] η θερμοκρασία μειώνεται και

για t∈(4,24] η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η

ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου

είναι -1 o C.

Μονάδες 6

B3. Για α=3 να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της

περιοχής είναι 0 o C.

Μονάδες 5

θ′(t)

Β4. Να υπολογίσετε το lim

t→4 2

t −16

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν

ομαδοποιηθεί σε κλάσεις ίσου πλάτους, όπως

4

εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΗΛΙΚΙΕΣ

νi

fi %

Νi

Fi % ν x

i i

xi

(χρόνια)

[

[

[

25, )

x

,

)

x+20

2x

x2–6x

,

,

)

)

[

50

ΣΥΝΟΛΟ

Γ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες fi % i=1,2,3,4

Μονάδες 6

Γ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι δ=50

χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι

c=10.

Μονάδες 8

Γ3. Aφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω

πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την

μέση τιμή x των ηλικιών.

Μονάδες 6

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην

πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση

ηλικία να είναι 40 χρόνια;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ ∆

Εξακόσιοι απόφοιτοι ∆ευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι

οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα,

υποβάλλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρείες Α και Β.

∆

ίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από

αυτούς:

•

να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από

λ

+

1

τις εταιρείες Α και Β είναι

, λ ≠ 0

3

λ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

•

•

να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από

3

λ

−

1

τις εταιρείες Α και Β είναι

, λ ≠ 0

3

λ

να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμμία από

1

λ − 2

τις δύο εταιρείες είναι

, λ ≠ 2

∆

∆

1. Να αποδείξετε ότι λ=4.

Μονάδες 8

2. Από τους 600 αποφοίτους που υπέβαλαν αίτηση

πρόσληψης στις εταιρείες Α και Β, η εταιρεία Α έκρινε

κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους

έκρινε η εταιρεία Β.

α) Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη

μόνο από την εταιρεία Α, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι

για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Β και πόσοι

απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια

από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι

για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν;

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι

για πρόσληψη, από τις εταιρείες Α ή Β.

Μονάδες 6

∆

3. Στους αποφοίτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για

πρόσληψη

δίνεται

η

δυνατότητα παρακολούθησης

προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης

εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το

πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που

δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι

απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι

για πρόσληψη, θα βρουν εργασία.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν επιτρέπεται

να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο

στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια,

διαγράμματα και πίνακες.

1

2

3

4

5

6

7

. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

8

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙ∆ΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f(x)=c, x∈ και c σταθερός πραγματικός

αριθμός. Να αποδείξετε ότι (c)΄=0

Μονάδες 7

Α2. Αν t , t , ..., t είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός

1

2

v

δείγματος μεγέθους ν, τότε να ορίσετε τη μέση τιμή x− των

παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε

ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

x0∈Α;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας

στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε

πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος,

αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x μιας

i

i

μεταβλητής Χ, τότε ισχύει:

0≤fi≤1

β) Αν xi είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, τότε η

αθροιστική σχετική συχνότητα Fi εκφράζει το ποσοστό των

παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής xi

γ) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω είναι

ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει:

Ρ(Α∪Β∪Γ)=Ρ(Α)+Ρ(Β)+Ρ(Γ)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) (συνx)΄=ημx, x∈

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε

το ενδεχόμενο Α∪Β πραγματοποιείται, όταν

πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ B

Οι ημέρες αδείας των υπαλλήλων μιας εταιρείας

ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με

τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός

ημερών

(αδείας)

xi

νi

fi

Ni

Fi

[

6,...)

16

[

[

[

[

...,...)

...,...)

...,...)

...,26)

Σύνολο

Aν ισχύει ότι:

•

στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδείας

το τόξο α του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί

1

ο

στην πρώτη κλάση, είναι 72 , και

•

3f =3f =f =f , τότε:

2

5

3

4

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω

πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.

Μονάδες 8

Β2. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το

ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδείας και την

τυπική απόκλιση του δείγματος.

(∆ίνεται:

25,6 ≈5,06)

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια

από 12 μέχρι 25 ημέρες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω Ω={ω , ω , ω , ω , ω } ο δειγματικός χώρος ενός

1

2

3

4

5

πειράματος τύχης και Α={ω , ω , ω }, Β={ω , ω , ω } δύο

1

2

3

3

4

5

1

ενδεχόμενα του Ω, με Ρ(Α)= . Αν είναι Ρ(ω )=α, Ρ(ω )=β,

1

2

2

2

2

με 26α –10α–2αβ+β +1=0, Ρ(ω )=γ και η συνάρτηση

3

3

∈

g(x)= Ρ(ω ) x , x , τότε:

4

1

1

Γ1. Να αποδείξετε ότι α=β= και γ=

5

10

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το Ρ(ω ), αν η εφαπτομένη της γραφικής

4

παράστασης της g, στο σημείο

(1, *g*(1)),

είναι

παράλληλη προς την ευθεία y=x, και στη συνέχεια να

βρείτε το Ρ(ω5)

Μονάδες 6

1

1

6

Γ3. Αν είναι Ρ(ω )= , Ρ(ω )= , τότε να βρείτε την

4

5

3

πιθανότητα των ενδεχομένων Κ, Λ, όπου:

Κ: «ένα μόνο από τα Α και Β να πραγματοποιείται»

Λ: «να πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται

το Β».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ ∆

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6

μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου

παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του

φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα

πλευράς x μέτρων, 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές της

διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω

σχήμα.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

∆

∆

1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση

του x είναι

f(x)=4x(3–x)2, 0<x<3

(∆ίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ).

Μονάδες 4

2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο

όγκο.

Μονάδες 6

f (x + 2) −8

∆

∆

3. Να βρείτε το όριο lim

x

x

→

0

Μονάδες 4

i=1,2,3,4,5 με

4. Θεωρούμε

τις

τιμές

y =f(x ),

i i

−

1

=x <x <x <x <x =2, οι οποίες έχουν μέση τιμή y=12,

1

2

3

4

5

τυπική απόκλιση s =2 και συντελεστή μεταβολής CV .

y

y

Nα βρείτε το εύρος R των τιμών y , i=1,2,3,4,5. Στη

i

συνέχεια να βρείτε τον αριθμό α∈ με –12<α<0 o

oποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές yi,

προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον,

ώστε

R

CV=2CVy+1

2

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

∆

5. Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν είναι Α≠∅, Β≠∅ και

Α⊆Β, να αποδείξετε ότι ισχύει:

2

P(A) ⎛ 3− P(B) ⎞

P(B) ⎝3− P(A) ⎠

≤

⎜

⎟

⎜

⎟

Μονάδες 5

Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην

αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν

επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και

τα φωτοαντίγραφα.

1

2

3

4

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με

μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο

για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5

6

7

. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

8

. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A′ ισχύει:

P(A′) = 1 - P(A)

Μονάδες 7

Α2.

Α3.

Να ορίσετε το μέτρο διασποράς εύρος ή κύμανση.

Μονάδες 4

Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο xo του πεδίου

ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα

στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι

σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α)

β)

lim (συνx) = συνx

o

x→x

o

(μονάδες 2)

′

′

(

)

c f(x) = c f (x)

(μονάδες 2)

γ) Σε

μια

ποσοτική

μεταβλητή

αντί

του

ραβδογράμματος

χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές,

όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε)

Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται

ασυμβίβαστα, όταν Α ∩ Β ≠ Ø

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

f(x) = 2e

(2x – 3), x∈\

x

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

f(x1)

( )

P(A) = x1 και P Β = –

6

e

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

1

2

2

3

( )

( )

και P B =

Β2. Να αποδείξετε ότι P A =

Μονάδες 6

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα

και

1

6

2

3

Β4. Να αποδείξετε ότι

P Α – Β

≤ ( ′ ′) ≤

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και

ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους

c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κεντρικές

Κλάσεις

τιμές

fi%

Fi

Fi%

xi

[

[

[

[

[

α, ·)

· , ·)

· , ·)

· , ·)

· , ·)

λ

3λ + 10

κλ2 – 2λ + 10

κλ2 – 3λ + 30

Σύνολα

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F3 και F5 είναι οι ρίζες της

εξίσωσης:

x2 – 8x + 3κ = 0 , όπου x

∈

\

∈

\

5

και κ

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι κ = 1 και λ = 10

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι f % = 10 , f % = 30 , f % = 20 , f % = 30 και f % = 10

1

2

3

4

5

Μονάδες 5

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των

παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε

ότι α = 10 και c = 4

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα

κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22

είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

x

Δίνεται η συνάρτηση f(x) =

+ 1, x ∈ \ και ο δειγματικός χώρος

x

2

+1

Ω = { ω , ω , ω , ω }, όπου ω = -1, ω = 0 και 1 < ω < ω

4

1

2

3

4

1

2

3

1

3

(

)

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες P ω = f(ω i) –

, όπου i = 1, 2

i

1

6

f′(x)

( )

P ω3 = –

και

lim

x

→

1

x – 1

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

}

{

∈

′

≤

{ ∈

Β = ω Ω

}

f(ω) > 1

A = ω Ω

f (ω) 0 ,

και

⎧

1

4

⎫

Γ = ⎨ω∈Ω

x

2

+ ωx ≥ –

για κάθε x ∈ \⎬

⎩

⎭

(

) ( ) ( )

( )

και P ω

4

α) Να βρείτε τις πιθανότητες P ω , P ω , P ω

1

2

3

(μονάδες 8)

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(Α), P(Β), P(Γ) και P(A-B)

(μονάδες 8)

Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της

f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα x′x γωνία 45ο

Μονάδες 4

Δ3. Αν Μ (ω , y ), κ = 1, 2, 3, 4 είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): y = x + 1 με

κ

κ

κ

2

δ = δ και Ryκ = 5

ω y

κ κ

τότε να υπολογίσετε τα ω και ω του δειγματικού χώρου Ω, όπου

3

4

δωκ : η διάμεσος των τετμημένων των σημείων Μκ ,

δ : η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων Μ και

y

κ

κ

R : το εύρος των τεταγμένων των σημείων Μ

y

κ

κ

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο

εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην

αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το

εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να

μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2

3

.

.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν

θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο

με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το

ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε

ότι

( ∪ ) = ( )+ ( )− ( ∩ )

P A B P A P B P A B

Μονάδες 7

Α2.

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f

παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

x1 ∈ A ;

Μονάδες 4

v

x

μιας μεταβλητής

X ;

Α3.

Α4.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα

της τιμής

i

i

Μονάδες 4

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας,

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση

είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των

( −

+ )

παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα x 2s, x 2s , όπου x η μέση τιμή

και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)

β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το

πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα.

(μονάδες 2)

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο

x

. Ο συντελεστής

0

γ)

διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της

(

( ))

είναι

'( )

f x

0

x , f x

(μονάδες 2)

0

0

δ) Το ενδεχόμενο A − B πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά

όχι το B

(μονάδες 2)

ε)

Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο

διασποράς.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται

στο διάστημα [10, 20) και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε,

επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο

από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του

1

6.

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα

συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Αθροιστική

Σχετική

Συχνότητα

Κεντρικές

Τιμές

Σχετική

Συχνότητα

Αθροιστική

Συχνότητα

Συχνότητα

Κλάσεις

vi

xi

fi%

Ni

Fi%

[

[

[

[

10, · )

· , · )

· , · )

· , · )

· , 20)

[

Σύνολο

Μονάδες 12

Β2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία x των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών

τους.

Μονάδες 8

Β3. Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από

ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

(Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

{−1,0,1,2 } ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των

Έστω Ω

=

απλών ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση

α

Ρ(κ) =

,

κ ∈ Ω, με α > 0

κ + 1

2

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α , Β του Ω με

{

}

2

κ > 1

Α = κ ∈Ω

{

(κ2 )(

) }

Β = κ ∈ Ω

− 1 κ − 4 = 0

2

5

Γ1. Να αποδείξετε ότι α

του Ω.

=

και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων

11

Μονάδες 8

1

6

( ) =

( ) =

, Ρ Β

Γ2. Να αποδείξετε ότι Ρ Α

και να βρείτε τις πιθανότητες των

11

11

ενδεχομένων:

Γ : «να πραγματοποιείται το B και όχι το A »

Δ: «να μην πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B».

Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

1

κ

9

4

f(x) =

x3 +

x2 +

x − 1, x ∈

ꢀ, κ ∈ Ω

3

2

και το ενδεχόμενο

{ ∈

κ Ω

}

Ε

=

η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα .

Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο Ε είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 100 m. Θεωρούμε

εσωτερικό σημείο Γ του ΑΒ τέτοιο, ώστε το μήκος του

τμήματος ΑΓ να είναι x m.

Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΖ και ΓΒΘΗ, όπως

φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως

συνάρτηση του x, είναι

Ε(x) = 2x2 − 200x + 10000, x

∈ (0, 100

)

(μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν Ε(x) γίνεται ελάχιστο.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για x= 50, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ σε v διαδοχικά

ꢁ

i, i = 1, 2, ..., v

ευθύγραμμα τμήματα

με αντίστοιχα μήκη

xi, i = 1, 2, ..., v.

xi, i = 1, 2, ..., v

x = 2

και η τυπική τους απόκλιση είναι

Αν η μέση τιμή των μηκών

είναι

s = 0,2 τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι v = 25

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με

ꢁ

x ,

i

πλευρές τα διαδοχικά τμήματα

με αντίστοιχα μήκη

όπου

i = 1, 2, ..., 25

i

⎧

2 ⎫

⎛

ν

⎞

∑

⎪

⎪

⎜

t ⎟

i ⎟ ⎪

⎠ ⎪

⎪

⎜

ν

1

⎪

∑

⎝

Δίνεται ότι: s2

=

t

2 −

i

i = 1

⎨

⎬

ν

ν

⎪

⎪

i = 1

⎪

⎪

⎪

⎪

⎭

⎩

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ꢁ

i, i = 1, 2, ..., 25

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

{

ꢁ

i, i = 1, 2, ..., 25 τέτοιο, ώστε ο δείκτης i να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή

πολλαπλάσιο του 4 .

Λ =

}

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο

πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των

απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε

πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2

3

.

.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν

θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με

μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η

εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.**

Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και Β, να αποδείξετε ότι



   

P A  P B .

P A

**Μονάδες 7**

**Μονάδες 4**

**Α2.**

**Α3.**

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας των

x 0, και πώς, αν x 0;

παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X, αν

**Μονάδες 4**

**Α4.**

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας,*

*δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση*

*είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

f

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού Α, τότε η συνάρτηση

έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το Α.

g

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι

 

f x 0

'

Δ

f

για κάθε εσωτερικό σημείο του , τότε η είναι γνησίως φθίνουσα

στο Δ.

X,

ισχύει ότι

γ)

Για τη σχετική συχνότητα f της τιμής x μιας μεταβλητής

i

i

0



f



1

.

i

δ) Η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι

μέτρο θέσης.

ε)

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Το ενδεχόμενο A

πραγματοποιείται μόνο όταν τα Α, Β πραγματοποιούνται συγχρόνως.

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση

f(x) αx

3



β

x

2



4

,

x



,

τ

η

ς

ο

π

ο

ί

α

ς

η

γ

ρ

α

φ

ι

κ

ή

π

α

ρ

ά

σ

τ

α

σ

η



εφάπτεται στον άξονα x x στο σημείο Α(-2,0).

**Β1.** Να αποδείξετε ότι α=1 και β=3.

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 7**

**Β2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Β3.** Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει

τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

**Μονάδες 6**

**Β4.** Να υπολογίσετε το όριο:

f(x)

lim

x2

x

 1 5

2

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Θεωρούμε ένα δείγμα ν συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα

Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν

χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι

ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Δίνεται ότι:







Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.

Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.

Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που

ο

αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με 36 .

Ν

Ν

Ν

Ν



1



2



3



4 , όπου Ν , Ν , Ν και Ν είναι οι αθροιστικές συχνότητες της

1 2 3 4

4

9

15 18

1ης, 2 , 3 και 4 κλάσης αντίστοιχα.

ης

ης

ης

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το πλάτος **c** της κάθε κλάσης είναι 4.

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα **Ι** συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την

απάντησή σας.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Κεντρικές**

**τιμές**

**Σχετικές**

**συχνότητες**

**Κλάσεις**

**(σε ώρες)**

**xi**

**fi%**

[

[

[

[

[

, )

, )

, )

, )

, )

**Σύνολο**

Πίνακας **Ι**

**Μονάδες 10**

f % 20, f % 25, f %30, f %15

Για τα ερωτήματα Γ3 και Γ4, δίνεται ότι

και

1

2

3

4

f5%10.

**Γ3.** Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί

τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι 4 ώρες

δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει

χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών. Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που

χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε

ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος τον μήνα Μάιο.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

x

Α

Κ

Β

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4. Θεωρούμε τα

εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ,

ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ = x,

όπως φαίνεται στο Σχήμα **Ι**.

x

Λ

Ν

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, ως

συνάρτηση του x, είναι:

x

Ε(x) = 2(x2 4x + 8), x 0, 4 .









x

Δ

Μ

Γ

Σχήμα **Ι**

**Μονάδες 4**

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν Ε(x) γίνεται ελάχιστο.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ3.** Θεωρούμε τις τιμές y E(x ), x (0, 4), i 1, 2, 3, ..., 19 , έτσι ώστε:

i

i

i

Τα x , i 1, 2, 3, ..., 19 είναι διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους.









i

Η μέση τιμή των xi, i 1, 2, 3, ..., 19 και η διάμεσός τους είναι ίσες με 2.

Η μέση τιμή των yi, i 1, 2, 3, ..., 19 είναι ίση με 8,02.

**α)** Να βρείτε τη μέση τιμή των

x2 , i 1, 2, 3, ..., 19.

i

(Μονάδες 6)

xi, i 1, 2, 3, ..., 19

**β)** Να βρείτε την τυπική απόκλιση sx των

και να εξετάσετε αν το

δείγμα τους είναι ομοιογενές.



2 



ν











t 





i





ν

1











s2



t

2 

i

i  1

t , i 1, 2, ..., ν

, όπου είναι

i

Δίνεται ότι





ν

ν





i  1













παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.

(Μονάδες 5)

. Να βρείτε την

xi, i 1, 2, 3, ..., 19

**γ)** Επιλέγουμε τυχαία μία από τις τιμές

πιθανότητα των ενδεχομένων :

A  { xi, i 1, 2, 3, ..., 19,

2

i



4

}

έτσι ώστε

x

,

B  { x , i 1, 2, 3, ..., 19, έτσι ώστε E(x ) 8 }

και

i

i

Γ: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

(Μονάδες 6)

**Μονάδες 17**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1**

**.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο**

**πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των**

**απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο

μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε**

πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

**2**

**3**

**.**

**.**

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν**

**θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με

μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η

εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

**4**

**5**

**6**

**.**

**.**

**.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x είναι

′

=

∈\

f (x) 1, για κάθε x

.

Μονάδες 7

Α2.

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου

ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3.

Α4.

Να ορίσετε το εύρος R (κύμανση) ενός συνόλου παρατηρήσεων μιας ποσοτικής

μεταβλητής.

Μονάδες 4

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας,

δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο συντελεστής μεταβολής CV είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες

μέτρησης.

β) Αν A , B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με A ⊆ B,

τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει P(A) > P(B).

γ) Η διάμεσος ενός δείγματος επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

δ) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής

του y = f(x) ως προς το x, όταν x = x0 .

ε)

Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή, περίπου το 95% των

παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (x − s, x + s), όπου x είναι η

μέση τιμή και s είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

f(x) = x

2

+ α, x ∈\, α > 0.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε το α.

Μονάδες 4

Β2. Για α = 3 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη x0 =1.

Μονάδες 7

Β3. Για α = 3 να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

f (x) − 2

Β4. Για α = 3 να υπολογίσετε το όριο lim

.

x −1

x→ 1

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα κουτί υπάρχουν σφαίρες, άλλες κόκκινου και άλλες μπλε χρώματος. Κάθε

σφαίρα φέρει έναν θετικό ακέραιο αριθμό. To πλήθος των σφαιρών με άρτιο αριθμό

είναι λ και το πλήθος των σφαιρών με περιττό αριθμό είναι λ+1.

Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει άρτιο αριθμό»

Π: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει περιττό αριθμό»

Κ : «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει κόκκινο χρώμα»

M: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει μπλε χρώμα».

Δίνεται ότι:

2

6

•

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Π είναι P(Π) =

.

5

1

6

•

Η πιθανότητα του ενδεχομένου M∩A είναι P(M∩A) =

.

5

1

Γ1. α. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν συνολικά 51 σφαίρες (μονάδες 7).

β. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν 6 μπλε σφαίρες με άρτιο αριθμό

(μονάδες 3).

Μονάδες 10

7

Γ2. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι P(Κ) =

0P(Μ), τότε

1

α. να αποδείξετε ότι στο κουτί περιέχονται 30 μπλε και 21 κόκκινες σφαίρες

(μονάδες 6)

β. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι μπλε με

περιττό αριθμό (μονάδες 5)

γ. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι κόκκινη με

περιττό αριθμό (μονάδες 4).

Μονάδες 15

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Ρωτήσαμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας να μας πουν πόσα παιδιά έχει η καθεμιά.

Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός

παιδιών

Οικογένειες

νi

xi

0

1

3

1

2

1

3

2

ν5

4

x6

1

ΣΥΝΟΛΟ

ν

Δ1. Αν η διάμεσος του αριθμού των παιδιών είναι δ=3 , να βρείτε τις δυνατές τιμές

του μεγέθους ν του δείγματος.

Μονάδες 9

8

Δ2. Αν ν = 12 και η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών είναι x

α. να βρείτε την τιμή x6 (μονάδες 5)

=

, τότε

3

β. να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων (μονάδες 2) και το πολύγωνο

συχνοτήτων (μονάδα 1).

Τα διαγράμματα να γίνουν με στυλό.

Μονάδες 8

Δ3. Μετά από ένα χρόνο ξαναρωτήσαμε τις ίδιες οικογένειες για το πλήθος των

παιδιών της καθεμιάς. Η οικογένεια που δεν είχε παιδιά απέκτησε δίδυμα και μία

από τις οικογένειες που είχε ένα παιδί απέκτησε και δεύτερο. Στις υπόλοιπες

οικογένειες ο αριθμός των παιδιών δεν μεταβλήθηκε. Να βρείτε τη μέση τιμή του

αριθμού των παιδιών που προκύπτει από τις νέες παρατηρήσεις.

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

.

Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-

πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των

απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το

εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να

μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2

3

.

.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων,

αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα

δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας,

να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο

με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.**

Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης f(x)  c , x 

είναι f (x) 0 , για κάθε x 





.

**Μονάδες 7**

**Α2.**

**Α3.**

Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

**Μονάδες 4**

Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x0 του

πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**Α4.**

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας*

*δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η*

*πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*







x 

x   x

**α)** Ισχύει ότι

, για κάθε

.

**β)** Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής

είναι μέτρα διασποράς.

**γ)** Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει

ότι P(A  Β)  P(Α)P(B).

**δ)** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής λέγεται ομοιογενές, αν ο συντελεστής

μεταβολής (CV) δεν ξεπερνά το 10%.

**ε)**

Δύο ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα

Α  Β  

όταν

.

**Μονάδες 10**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΘΕΜΑ Β**

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 50% συμμετέχει στην ομάδα του ποδοσφαίρου, το

5% δεν συμμετέχει στην ομάδα μπάσκετ και το 25% συμμετέχει και στις δύο

5

παραπάνω ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα:

**Β1.** Ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα του μπάσκετ.

**Μονάδες 6**

**Β2.** Ο μαθητής να μην συμμετέχει σε καμία από τις δύο ομάδες.

**Β3.** Ο μαθητής να συμμετέχει σε μόνο μία από τις δύο ομάδες.

**Μονάδες 9**

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

x

Δίνεται η συνάρτηση f(x)

, x  .

x 1

2

2

f(x) 1

x 1

lim

**Γ1.** Να βρείτε το όριο

.

x1

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 7**

**Γ2.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της









συνάρτησης f στο σημείο A 2,f 2 .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία ο

συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ισούται με 1.

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΘΕΜΑ Δ**

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων για τους βαθμούς των

μαθητών ενός σχολείου Α σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών.

ν3

1

0

5

0

10 12 14 16

18 20

Βαθμολογία





Δίνεται ότι η σχετική συχνότητα επί τοις εκατό της πρώτης κλάσης f % ισούται με 10.

1

(Θεωρήστε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα

στην κλάση).

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα

ν  50

και ότι η συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι

ν3  20.

είναι

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή xA και τη διακύμανση

s

2

A

των βαθμών των

μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα.

**Μονάδες 8**

**Δ3.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών των μαθητών που συμμετείχαν στο

διαγώνισμα και ο βαθμός τους ήταν τουλάχιστον 12.

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Οι βαθμοί των μαθητών στο διαγώνισμα των Μαθηματικών ενός σχολείου Β

ομαδοποιήθηκαν στις ίδιες ακριβώς κλάσεις, όπως και αυτές του σχολείου Α. Η

συχνότητα κάθε κλάσης του σχολείου Β βρέθηκε τριπλάσια από τη συχνότητα

της αντίστοιχης κλάσης του σχολείου Α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή xB και τη

διακύμανση

s

2

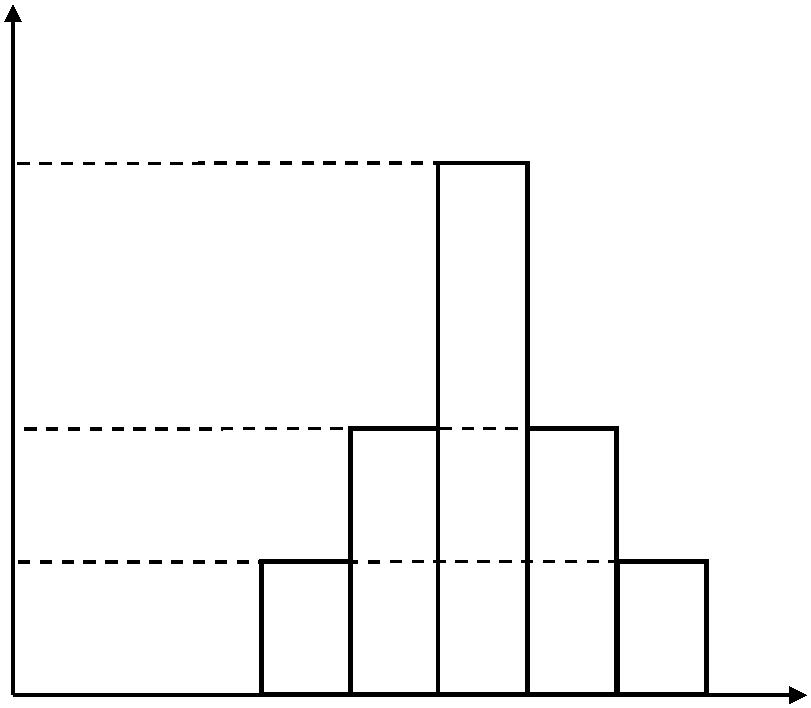
B

των βαθμών των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα

Μαθηματικών του σχολείου Β.

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

image706image707image708image709image710image711image712image713image714image715image716image717

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

**1**

**.**

**Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο**

**πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών**

**σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην**

**αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας

το όνομά σας.

**2**

**3**

**.**

**.**

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως

μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα**

**βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί

με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο

στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

**4**

**5**

**6**

**.**

**.**

**.**

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

HMEΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ’ ένα σύνολο Α, να

′ = ⋅ ′ , όπου c ∈ \ x ∈ Α.

αποδείξετε ότι (c f(x)) c f (x)

⋅

,

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα

διάστημα ∆ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση

είναι λανθασμένη.

α) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι

ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το

1

0%.

(Μον. 2)

β) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο

(

)

διάστημα x − 2s,x+ 2s βρίσκεται το 99,7% περίπου

των παρατηρήσεων, όπου x η μέση τιμή και s η

τυπική απόκλιση.

(Μον. 2)

γ) Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για

την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης f (g(x)) ισχύει:

′

= ′

(f (g(x))) f (g(x)) g (x)

⋅ ′

(Μον. 2)

δ) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων

επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

(Μον. 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image719image720

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ν

′ = ν − ⋅

ε) (x ) ( 1) x , όπου ν φυσικός αριθμός.

ν

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

Β1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι:

7

, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή x των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s των παραπάνω

αριθμών.

Μονάδες 7

Β4. Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω

αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής

μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

∆

ίνεται η συνάρτηση f:\ → \ με τύπο:

1

4

3

f (x) = x

3

− x − 3x −

2

3

′

′′

Γ1. Να βρείτε τις f (x) και f (x).

Μονάδες 6

Μονάδες 7

′

+ ′′

f (x) f (x) 4

+

Γ2. Να βρείτε το: lim

−

x 1

x

→1

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image721image722

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της

συνάρτησης f , η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην

ευθεία y = − 4x + 16.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

παράστασης της συνάρτησης f στο x0 = 1.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ ∆

∆

ίνεται η συνάρτηση f:\ → \ με τύπο:

f (x)= x

4

+ αx + β ,

α , β∈ \

∆

1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον. 6) και β (μον. 2) αν

f(−1+ h) − f(−1)

f (0)= 2019 και lim

= 0

h

h→0

Μονάδες 8

∆

∆

2. Για α = 4 και β = 2019, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως

προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Μονάδες 12

3. Να αποδείξετε ότι x

4

+ 4x ≥ −3 για κάθε x ∈ \ .

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image724image725

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα).

τετράδιο.

Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν επιτρέπεται

να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνο με μπλε ή

μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.

3

4

5

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.30

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image726

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

HMEΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

(ΟΜΑ∆Α A΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙ∆ΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑ∆Α Β΄)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα

σημείο x0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση

είναι λανθασμένη.

x

s

α) CV= , όπου x η μέση τιμή, s η τυπική απόκλιση

και CV ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος

παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

A

lim f(x) = A

1

β) Αν lim f(x) = τότε

1

x→x

x→x

0

0

(Μον. 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x0

του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και

παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(Μον. 2)

δ) (cf ) (x) c f (x), όπου c σταθερά και f παραγωγίσιμη

= − ′

′

συνάρτηση.

(Μον. 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image727image729

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

α

∫

=

f (x) dx 0, όπου f συνεχής συνάρτηση

ε)

α

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω

ισότητες σωστά συμπληρωμένες.

α) Η παράγουσα της f(x) = ημx είναι η F(x) = ...

(Μον. 3)

β) Αν f (x)= xα, α ∈ \\*, x > 0 τότε f (x) ...

=

′

(Μον. 3)

β

∫

=

γ) cdx ..., όπου c σταθερά

α

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε οκτώ μαθήματα είναι οι

παρακάτω:

1

1, 16+α, 14, 10, 15, 2α+10, 17, 18

Β1. Να υπολογίσετε το α αν η μέση τιμή των βαθμολογιών

του μαθητή είναι 15.

Μονάδες 7

Β2. Για α=3 να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) των

παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

Β3. Για α=3 να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση (s).

Μονάδες 8

Β4. Για α=3 να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής

(CV).

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image731

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

ίνεται η συνάρτηση f : \ → \ με τύπο:

∆

⎧

2

−

4x + 3

− 9

x

,

x > 3

⎪

x

2

⎪

⎪

α

f (x)= ⎨ , x = 3

3

⎪

⎪

β + ex−3 , x < 3

⎪

⎩

Γ1. Να βρείτε τo lim f(x) .

x→3+

Μονάδες 10

Μονάδες 7

Γ2. Να βρείτε τo lim f(x).

x→3−

Γ3. Nα βρείτε τις τιμές των α, β∈ \ έτσι ώστε η συνάρτηση

f να είναι συνεχής στο x = 3.

0

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ ∆

∆

ίνεται η συνάρτηση f : \ → \ με τύπο:

f(x) =(x + 3)(x − 3)

2

′

=

−

∆

∆

1. Να αποδείξετε ότι: f (x) 3(x 1)

2

Μονάδες 7

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

∆

3. Να συγκρίνετε τις τιμές f( 2), f( 3).

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image732image734image735

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

∆

4. Αν g(x) =3x2 − 6x + 3, να υπολογίσετε το εμβαδόν του

χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση

′

της g, τον άξονα x x και τις ευθείες με εξισώσεις x = 0

και x = 1.

Μονάδες 8

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

τετράδιο.

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν

επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα

φωτοαντίγραφα.

3

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνο με

μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.

4

5

. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.30

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image736

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

HMEΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω t , t , . . . , t

οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής

1

2

ν

μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν που έχουν μέση

τιμή x. Σχηματίζουμε τις διαφορές t − x, t − x,. . .,t − x.

1

2

ν

Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών

αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται

συνεχής.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε

ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο

x0 ∈ A .

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση

είναι λανθασμένη.

A \

α) Αν υπάρχει το lim f(x) και είναι ίσο με ∈ , τότε

x→x

0

( )ν A

lim f(x)

=

ν , όπου ν φυσικός αριθμός.

x→x

0

′

1

(

)

β) Για κάθε x >0 ισχύει

x =

.

x

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image737image738image739image740

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο

(

)

διάστημα x − s,x + s βρίσκεται το 95% περίπου των

παρατηρήσεων, όπου x η μέση τιμή και s η τυπική

απόκλιση.

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα

διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για

οποιαδήποτε σημεία x ,x ∈Δ με x < x

ισχύει

1

2

1

2

f(x )> f(x ).

1

2

ε) Η σχετική συχνότητα f της τιμής x δίνεται από τον

i

i

ν

τύπο fi = i , όπου ν η συχνότητα της τιμής x και ν το

i

i

v

μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα

είναι:

7

, 8, 10, 5, 11, 7

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:

α. τη μέση τιμή x

β. τη διάμεσο δ

(μον. 3)

(μον. 3)

γ. τη διακύμανση s2 (μον. 5)

Μονάδες 11

Β2. Να

αποδείξετε

ότι

το

δείγμα

των

παραπάνω

παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει

να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω

παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι

ομοιογενές.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image742image743image744image745image746

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

∆

ίνεται η συνάρτηση f:\ →\ με τύπο:

f (x) x

=

3 −

κx 2, κ

+

∈

\

.

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ∈ \ ώστε η γραφική

παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα x′x

στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5

f(x)

Γ2. Για κ =3 να βρείτε το lim

.

2

−

x 1

x→1

Μονάδες 10

Γ3. Για κ =3 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο

(

(

)

)

M 2,f 2 .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ ∆

∆

ίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

x

3

f (x) =

+

x2 + 4 4

∆

∆

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

Μονάδες 5

4

−

x

2

2. Να αποδείξετε ότι f′(x) =

.

2

(

)

x

2

+

4

∆

∆

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 8

4. Αν

οι

τιμές

f(−1), f (1), f (0, 25), f(−0, 5), f(0)

είναι

παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ, τότε να τις διατάξετε

κατά αύξουσα σειρά (μον. 5) και να υπολογίσετε το

εύρος τους (R) (μον. 2) και τη διάμεσό τους (δ) (μον. 2).

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image747image748image749image750

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

2

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε

τα θέματα στο τετράδιο.

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν

επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και

τα φωτοαντίγραφα.

3

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα,

μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης

μελάνης.

4

5

. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

6

. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17.00

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image751

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

HMEΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα

σύνολο A, να αποδείξετε ότι:

′

'

∈\

∈

, x A

( ⋅

c f ( x )

) = ⋅

c f ( x ), όπου c

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν

παρατηρήσεων όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση

είναι λανθασμένη.

α. Αν xi είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η

αθροιστική σχετική συχνότητα Fi εκφράζει το

ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες

της τιμής xi .

β. Η ταχύτητα υ(t ) ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα

και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από

τη συνάρτηση x = f (t ) θα είναι, τη χρονική στιγμή t0 ,

υ( t )= f '( t ).

0

0

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image752

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

γ. Στο

ιστόγραμμα

συχνοτήτων

ομαδοποιημένων

δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα

είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Αν οι συναρτήσεις f ,g είναι παραγωγίσιμες σε ένα

σύνολο A, τότε:

′

'

(

⋅ ) =

f ( x ) g(x)

⋅

−

⋅ '

f ( x ) g(x) f ( x ) g (x)

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες

μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να

απαντήσουν σε μία ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω

πίνακα:

Αριθμός

υποψηφίων

Σχετική

Συχνότητα

Χρόνος σε

λεπτά

νi

f

%

i

[

[

0,2)

2,4)

1

7

[

[

4,6)

6,8)

4

[

8,10)

1

ΣΥΝΟΛΑ

20

100

Β1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας

και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις

αντίστοιχες τιμές.

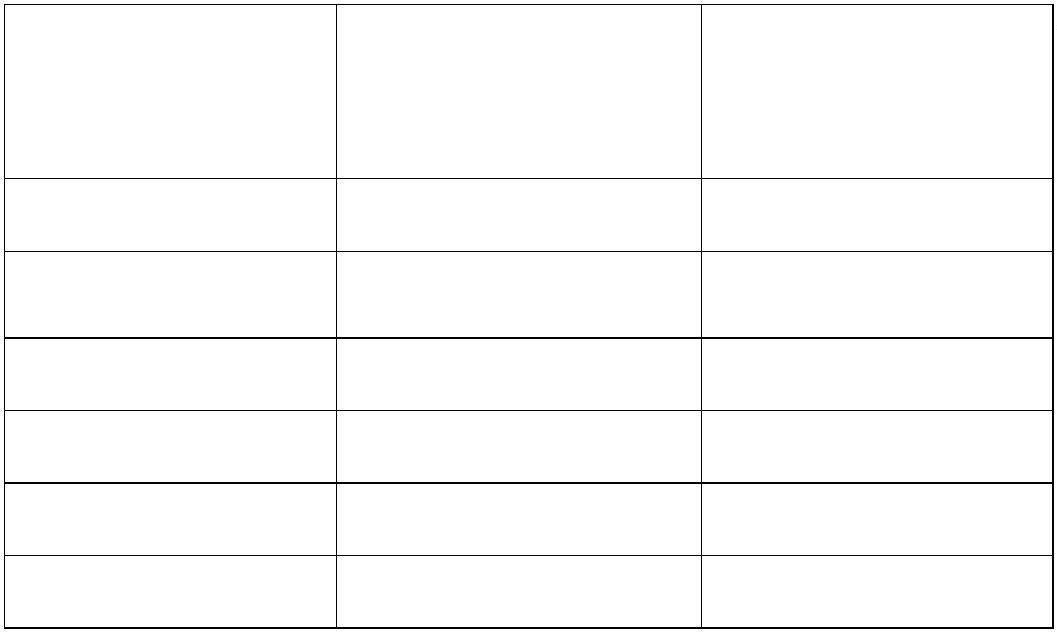
Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή x του χρόνου που χρειάστηκαν

οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image753

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Β3. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν

τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην

ερώτηση;

Μονάδες 5

Β4. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των

σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ( fi % ).

Μονάδες 6

Β5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται

από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις

εκατό ( fi % ) και τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

f

:

\

→

\ με τύπο:

∆

ίνεται η συνάρτηση

=

x

3

−

2

x

2

+

3

x

+

2

f

(

x

)

Έστω ότι

'

+

f (1) 3 , 8 , f(1) , 7 , f( 2 ) , 10

είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των παρατηρήσεων (μον. 3), τη μέση

τιμή (μον. 4) και τη διάμεσο (μον. 3).

Μονάδες 10

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των παραπάνω

παρατηρήσεων είναι s = 2.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

⎛

⎝

R

R ⎞

3 ⎠

παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α , f ( ) ,

⎜

⎟

3

όπου R το εύρος των παραπάνω παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Γ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image755image756

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ ∆

Θεωρήστε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση:

4

s2

f (x) = x2 +

+ x −27, με x ≠0,

x

όπου x και s είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση

αντίστοιχα των παρατηρήσεων x ,x ,..., x μιας μεταβλητής X

1

2

ν

ενός δείγματος. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της

(

)

συνάρτησης f στο σημείο M 2, f ( 2 ) είναι παράλληλη στον

( )

άξονα x' x και το σημείο Κ 1,0 ανήκει στη γραφική

παράσταση της συνάρτησης f .

∆

∆

1. Να δείξετε ότι s =2 και x =10.

Μονάδες 10

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 4

2

'

x f (x)

∆

∆

3. Να βρείτε το lim

4

x +1 −3

x

→

2

Μονάδες 6

4. Έστω ότι y ,y ,..., y είναι οι τιμές που προκύπτουν από

1

2

ν

τις παρατηρήσεις x ,x ,..., x αντίστοιχα, όταν η κάθε μία

1

2

ν

από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε τον συντελεστή

μεταβολής των τιμών y ,y ,..., y .

1

2

ν

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image757image758

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ∆΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

τετράδιο.

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν επιτρέπεται

να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνον με

μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.

. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

3

4

5

6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17.00

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image760

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

HMEΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι

συνάρτησης f ( x )=c, όπου x, c ∈ \ και c σταθερά, είναι

η

παράγωγος της σταθερής

'

ίση με 0, δηλαδή f ( x ) (c) 0

=

' = .

Μονάδες 7

Α2. Αν x ,x ,..., x είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής

1

2

ν

μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους ν και w ,w ,...,w

1

2

ν

είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας),

να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται ο

σταθμικός μέσος x της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα

σημείο xο του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση

είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο

ορισμού Α, μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα

τοπικό μέγιστό της.

β. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων

δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το

πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο

άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος ν.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image761

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. Αν οι συναρτήσεις f ,g : \ → \ είναι παραγωγίσιμες

στο πεδίο ορισμού τους, με g(x) ≠ 0 για όλες τις τιμές

του x, τότε ισχύει:

′

'

⎛

⎞

⋅

−

⋅ '

f ( x ) g(x) f ( x ) g (x)

f ( x )

g(x)

=

⎜

⎟

g(x)

⎝

⎠

δ. Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος είναι

ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του

δείγματος.

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη

γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής

μεταβλητής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

ίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός

καταστήματος:

∆

1

3, 12, λ + 5, 9, 14, 15, κ, 12, 17, 13

2

−

x 9

όπου: λ=lim

2

−

x 3x

x

→

3

Β1. Να δείξετε ότι λ=2.

Μονάδες 6

Β2. Για λ=2 να υπολογίσετε την τιμή του κ , αν η μέση

τιμή ( x ) των προϊόντων είναι 12.

Μονάδες 6

Β3. Για λ=2 και κ =8 να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση

των τιμών των προϊόντων είναι 3.

(

s

)

Μονάδες 7

Β4. Για λ=2 και κ =8 να εξετάσετε αν το δείγμα των

τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image762image763image764image765

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΘΕΜΑ Γ

∆ίνεται η συνάρτηση

f

:

\

→

\ με τύπο:

=

3 −

f (x) x 2x αx 2 ,

2 − +

όπου α ∈ \ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της

Α(0, f(0 )) να σχηματίζει με τον άξονα x' x γωνία 45o .

Μονάδες 6

Γ2. Για α = −1 να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη

μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ3. Για α = −1 να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών

ακροτάτων της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Για α = −1 να δείξετε ότι:

f ( 2019 )+ f ( 2020 ) > 2⋅ f (1)

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ ∆

f

:

\

→

\ με τύπο:

∆

ίνεται η συνάρτηση

=

−

2 − + 2 −

f (x) ( λ 3 )x λx λ 6 λ ,

όπου για τη σταθερά λ ισχύει 0 < λ < 3.

∆

1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης f στο σημείο της Α(0, f(0 )) είναι

y

=

λx λ 6 λ

− + 2 −

Μονάδες 7

∆

2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης f στο σημείο της Α(0, f(0 )) σχηματίζει με

τους

άξονες

x

'

x

και

y

'

y

τρίγωνο

εμβαδού

1

E

(

λ

)

=

λ ( λ 6 )

⋅ ⋅ −

2

2

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image766image767

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

∆

∆

3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω

τριγώνου να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 6

4. Για λ = 2 δίνονται τα σημεία A ( x ,y ), A ( x ,y ),

1

1

1

2

2

2

A ( x ,y ), A ( x ,y ), A ( x ,y ) της εφαπτομένης της

3

3

3

4

4

4

5

5

5

γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της

Α(0, f(0 )). Αν οι τετμημένες x , x , x , x , x των σημείων

1

2

3

4

5

A

,

A

,

A

,

A

,

A

α

ν

τ

ί

σ

τ

ο

ι

χ

α

,

έ

χ

ο

υ

ν

τ

υ

π

ι

κ

ή

α

π

ό

κ

λ

ι

σ

η

s

=

2

,

1

2

3

4

5

x

να βρείτε την τυπική απόκλιση sy των τεταγμένων

y

,

y

,

y

,

y

,

y

τ

ω

ν

σ

η

μ

ε

ί

ω

ν

α

υ

τ

ώ

ν

.

1

2

3

4

5

Μονάδες 5

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο

τετράδιο.

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν επιτρέπεται

να γράψετε καμια άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να

παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνον με

μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλου μελανιού.

. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

3

4

5

6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17:00.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image768

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

HMEΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω x ,x ,..., x

κ

οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός

1

2

δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί

αριθμοί με κ ≤ ν. Για τη σχετική συχνότητα fi της τιμής

xi , i =1,2,...,κ να αποδείξετε ότι:

f + f +...+ f =1

1

2

κ

Μονάδες 5

Α2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A, και B το

σύνολο των x ∈ A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη.

Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f ;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,

γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που

αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η

πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση

είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση υ της ταχύτητας ενός κινητού είναι

παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη

χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

β. Αν δύο συναρτήσεις f , g ορίζονται και οι δύο σε ένα

f

R =

σύνολο A, τότε ορίζεται και η συνάρτηση

με

g

f ( x )

R( x )=

, όπου

x ∈ A και

g

(

x

)

≠

0

.

g( x )

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image769image770image771

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

γ. Αν x , x είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X , με

1

2

αντίστοιχες συχνότητες ν , ν , τότε για τις αθροιστικές

1

2

συχνότητες Ν , Ν ισχύει ν = Ν + Ν , όπου Ν = ν .

1

2

2

2

1

1

1

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες

και να τις συμπληρώσετε.

′

( ) =

α. ημx

...

′

( )

ρ = , όπου

β.

γ.

x

.

.

.

ρ

ρητός αριθμός.

′

⎟

⎛

⎞

f

(

x

)

= ... , όπου f , g :\ → \ είναι συναρτήσεις

⎜

g

(

x

)

⎝

⎠

παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με g( x ) ≠ 0

για κάθε x ∈\.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που

αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη

διάρκεια μίας ημέρας.

xi

νi

fi % Ni

0

1

1

2

κ

2

3

8

κ −

1

Σύνολο 20

100

Β1. Να αποδείξετε ότι κ =3.

Μονάδες 7

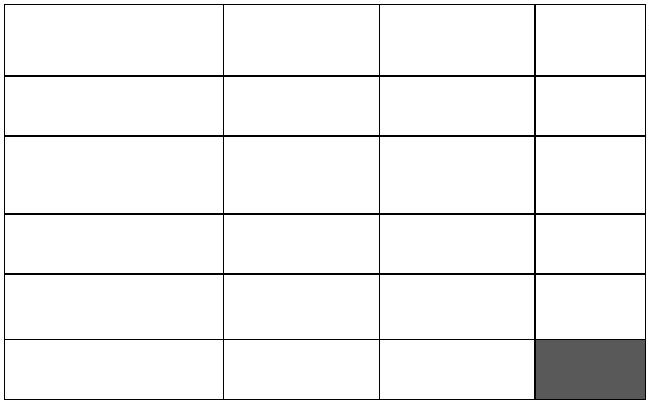
Β2. Για κ =3 να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο

τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές

τιμές.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image772image773

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

Β3. Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο

σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας

ημέρας;

Μονάδες 3

Β4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν

τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

1

1

− x

+ x

∆

ίνεται η συνάρτηση f (x) =

,

x

≠

−

1

.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

για x < −1.

Μονάδες 7

5

[

]

Γ2. Αν x ∈ −4,− 2 , να αποδείξετε ότι −3 ≤ f ( x ) ≤− .

3

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής

(

)

παράστασης της f στο σημείο A 0, f ( 0 ) .

Μονάδες 6

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο

(

)

σημείο A 0, f ( 0 ) τέμνει τους άξονες x´x και y' y στα

σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του

τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο(0,0) είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ ∆

∆

ίνεται η συνάρτηση f :\ → \ με τύπο:

f (x) = x3 − x2 + x − a2 − a , a ∈ \

6

9

8

∆

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία

της.

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

image775image776image777

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

∆

2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως

συνάρτηση του a.

Μονάδες 4

∆

∆

3. Να βρείτε για ποια τιμή του a το τοπικό ελάχιστο της

f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Μονάδες 8

4. Για a = −4 να υπολογίσετε το όριο

f ( x )−16

l

i

m

.

f

'

(

x

)

x

→

3

Μονάδες 5

Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1

. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά

(ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα

θέματα στο τετράδιο.

2

. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των

φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. ∆εν

επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα

φωτοαντίγραφα.

3

. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνο με

μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.

. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.

. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

4

5

6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17:00

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν

•

•

Η f είναι συνεχής στο Δ και

f (x) 0 για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

′

=

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι

διάστημα [α,β];

συνεχής σε ένα κλειστό

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο

τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη

λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α

f

και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

το A ∩ B.

είναι

g

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x0 ένα

εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

′

=

0

στο x και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε f (x ) 0.

0

γ) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε

ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο x0 ∈(α,β) καμπή,

′

′

=

τότε f (x ) 0.

0

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f : \ → \ , με lim f(x) > 0, ισχύει

x→x

0

ότι f(x) > 0, για κάθε x∈ \ .

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x0 του πεδίου

ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x0 .

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image1.jpegooxWord://word/media/image2.jpeg

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f : (1,+∞)→ \

1

με τύπο f(x)

=

1

− x

[

)

∞ →

\

και η συνάρτηση g: 0,

+

με τύπο

g(x) = x

.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή

x −1⎞2

x ⎠

⎛

⎝

f

−1(x) =

, x<0.

της είναι η συνάρτηση

⎜

⎟

Μονάδες 8

x −1

=

D

−1 είναι η h(x) =

, x<0.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

h g f

x

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

⎛

⎝

1⎞

x ⎠

−

h(x)

⋅

ημ

h

Β4. Να υπολογίσετε το όριο

lim ⎜ e

⎟ , όπου

είναι

η

−

x

→

0

συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να

κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με

σταθερή ταχύτητα v2 = 4km/h.

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο

Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

Ι.

Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα

από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε

l

η γωνία ΒΟΓ

=

θ

,

θ ∈ (0,π) και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος

του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(θ = )

0 .

ΙΙ.

Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β

(θ = π

)

.

ΙΙΙ.

Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image3.jpegooxWord://word/media/image4.jpegooxWord://word/media/image5.jpegooxWord://word/media/image6.jpegooxWord://word/media/image7.jpegooxWord://word/media/image8.jpeg

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να

διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε

ακτίνια) είναι

1

θ

t(θ) = θ + συν , θ ∈ [0,π].

4

2

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που

αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι S = R ⋅ θ.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του

μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το

σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε

πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f :

\

→ \

με τύπο

f(x) = e

x

\

→ \

= −x2 + αx , α ∈ \

και συνάρτηση g :

με τύπο

g(x)

,

(

)

\

για την οποία το όριο lim

−g(x) + αx υπάρχει στο

.

x→+∞

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = −1.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η

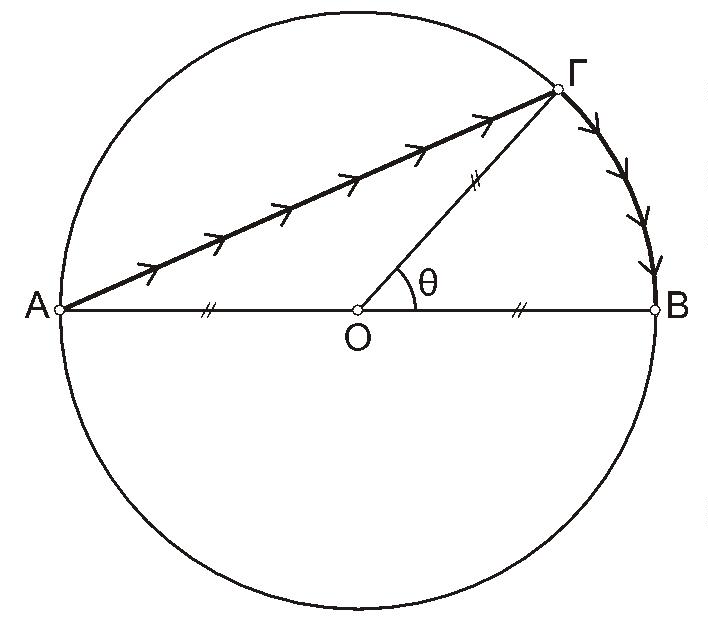
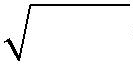
ευθεία ε : y = x + 1 (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη

γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image9.jpegooxWord://word/media/image10.jpeg

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ3. Να αποδείξετε ότι f(x) > g(x), για κάθε x∈ \ .

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

Μονάδες 6

( − ) −

( )− ( )

f x 1 x f x g x

+

=

0

, k

∈ \ − {1}

x − k

x − k − 1

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

3

.

.

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-

πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να

γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα

θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις

σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε

καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα

φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό

με μελάνι που δεν σβήνει.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image13.jpegooxWord://word/media/image14.jpegooxWord://word/media/image15.jpeg

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

Αν

•

•

Η f είναι συνεχής στο Δ και

f (x) 0 για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

′

=

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι

διάστημα [α,β];

συνεχής σε ένα κλειστό

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο

τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη

λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι

λανθασμένη.

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α

f

και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

το A ∩ B.

είναι

g

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x0 ένα

εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

′

=

0

στο x και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε f (x ) 0.

0

γ) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε

ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο x0 ∈(α,β) καμπή,

′

′

=

τότε f (x ) 0.

0

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f : \ → \ , με lim f(x) > 0, ισχύει

x→x

0

ότι f(x) > 0, για κάθε x∈ \ .

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x0 του πεδίου

ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x0 .

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image1.jpegooxWord://word/media/image2.jpeg

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f : (1,+∞)→ \

1

με τύπο f(x)

=

1

− x

[

)

∞ →

\

και η συνάρτηση g: 0,

+

με τύπο

g(x) = x

.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή

x −1⎞2

x ⎠

⎛

⎝

f

−1(x) =

, x<0.

της είναι η συνάρτηση

⎜

⎟

Μονάδες 8

x −1

=

D

−1 είναι η h(x) =

, x<0.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

h g f

x

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

⎛

⎝

1⎞

x ⎠

−

h(x)

⋅

ημ

h

Β4. Να υπολογίσετε το όριο

lim ⎜ e

⎟ , όπου

είναι

η

−

x

→

0

συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να

κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με

σταθερή ταχύτητα v2 = 4km/h.

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο

Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

Ι.

Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα

από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε

l

η γωνία ΒΟΓ

=

θ

,

θ ∈ (0,π) και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος

του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

(θ = )

0 .

ΙΙ.

Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β

(θ = π

)

.

ΙΙΙ.

Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image3.jpegooxWord://word/media/image4.jpegooxWord://word/media/image5.jpegooxWord://word/media/image6.jpegooxWord://word/media/image7.jpegooxWord://word/media/image8.jpeg

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να

διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε

ακτίνια) είναι

1

θ

t(θ) = θ + συν , θ ∈ [0,π].

4

2

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που

αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι S = R ⋅ θ.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του

μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το

σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε

πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f :

\

→ \

με τύπο

f(x) = e

x

\

→ \

= −x2 + αx , α ∈ \

και συνάρτηση g :

με τύπο

g(x)

,

(

)

\

για την οποία το όριο lim

−g(x) + αx υπάρχει στο

.

x→+∞

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = −1.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η

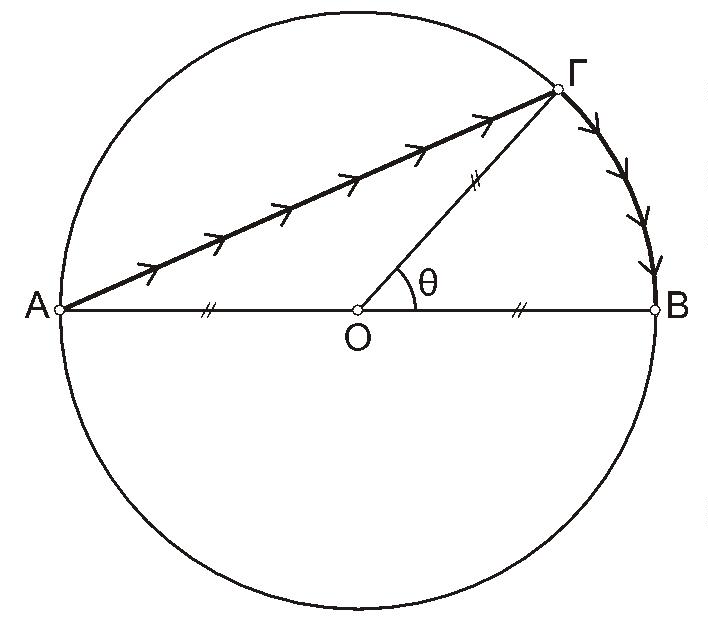
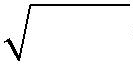
ευθεία ε : y = x + 1 (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη

γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image9.jpegooxWord://word/media/image10.jpeg

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙ∆ΑΣ

ΗΜΗΡΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ3. Να αποδείξετε ότι f(x) > g(x), για κάθε x∈ \ .

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

Μονάδες 6

( − ) −

( )− ( )

f x 1 x f x g x

+

=

0

, k

∈ \ − {1}

x − k

x − k − 1

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1

2

3

.

.

.

Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-

πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να

γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα

θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις

σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε

καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα

φωτοαντίγραφα.

Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό

με μελάνι που δεν σβήνει.

4

5

6

.

.

.

Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙ∆ΕΣ

ooxWord://word/media/image13.jpegooxWord://word/media/image14.jpegooxWord://word/media/image15.jpeg

image778image779