ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΉΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

β. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;

Μονάδες 4,5

Β1.Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας την ***ένδειξη, Σωστό ή Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 2,5

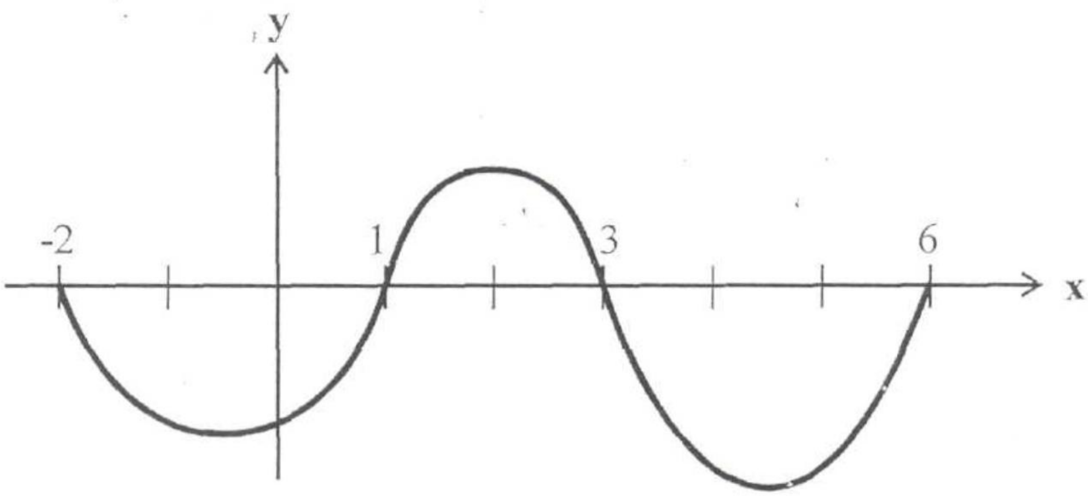
β. Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x+\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}+3$, όπου $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 2,5

γ. Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in A$, τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Μονάδες 2,5

Β.2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα [-2,6].



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + 2z + 2 = 0$, να αποδείξετε ότι $z_1^{20} - z_2^{20} =$ 0.

Μονάδες 12

β. Αν z_1 είναι ρίζα της εξίσωσης του α. ερωτήματος, με φανταστικό μέρος θετικό αριθμό, να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες z_1^{ν} είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πίνακα της συμμετρίας με την οποία μπορεί να προκύψει από την εικόνα της ρίζας z_1 η εικόνα της ρίζας z_2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^{2x}+1}{ημ2x}=5$$

α. Να βρείτε το f(0).

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_o = 0$.

Μονάδες 9

γ. Αν $h(x)= e^{-x} f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2+\frac{25}{4}}$

α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 2

β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη. χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

Μονάδες 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΖΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2.

Να αποδείξετε ότι: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Μονάδες 5

Α.2. Αν $z_1 = \rho_1 (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \rho_2 (\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ δυο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα:

	Στήλη Α		**Στήλη Β**
α.	$\dfrac{z_1}{z_2}$	1.	$\rho_1\rho_2\left[\eta\mu(\theta_1+\theta_2)+i\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)\right]$
β.	$z_1 \cdot z_2$	2.	$\rho_1^\nu\left[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta_1)+i\eta\mu(\nu\theta_1)\right]$
		3.	$\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)\right]$
		4.	$\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1-\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1-\theta_2)\right]$
γ.	z_1^ν	5.	$\rho_1\rho_2\left[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2)+i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)\right]$
		6,	$\rho_1^\nu\left[\eta\mu(\nu\theta_1)-i\sigma\upsilon\nu(\nu\theta_1)\right]$

Μονάδες 7,5

B.1. *Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3}\right) \text{ και } z_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3} + i\eta\mu\frac{5\pi}{3}$$

Τότε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ είναι ίσο με:

Α: 2 Β: 2i Γ: -2 Δ: -2i Ε: 2(1- i)

Μονάδες4,5

B.2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = 1 + i$. Να υπολογίσετε το z^{16}.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Θεωρούμε τον πίνακα Α διάστασης $(\kappa^2 - 2\kappa - 1) \times (\kappa + 2\lambda - 3)$ και τον πίνακα Β διάστασης $(\lambda + 1) \times (3\kappa - \kappa^2 + 2)$, όπου κ και λ θετικοί ακέραιοι.

α. Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα κ και λ, για να ορίζεται το γινόμενο Α · Β

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ και τις διαστάσεις των πινάκων Α και Β, για να ορίζονται τα γινόμενα Α ·Β και Β · Α

Μονάδες 10

Β. Δίνεται, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $A^2 = -I$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Μονάδες 4

β. $2A^{2004} + A^{2001} + A^{1999} = 2I$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$,

όπου α πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1,0) να διέρχεται από το σημείο Α(-2,3).

Μονάδες 10

γ. Αν $\alpha > 2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψήφιων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δυο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δυο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α. Να αποδείξετε ότι το κόστος Κ(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$K(x) = 10\left(x + \frac{16}{x} + 40\right)$$

όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

Μονάδες 13

β. Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του β. ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

Μονάδες 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ :
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

· όλες οι συναρτήσεις της μορφής:

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in IR$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

· κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x)=F(x)+c,\ c\in IR$$

Μονάδες 6,5

Α.2. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx =$ .....

β. $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx =$ .....

γ. $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]\,dx =$ .....

όπου $\lambda,\mu \in IR$ και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Μονάδες 6

Β.1. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=6x+4$, $x \in IR$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0,3)$ έχει κλίση 2.

Μονάδες 6,5

Β.2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

α. $\int_0^1 \left(e^x + x\right) dx$

Μονάδες 2

β. $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx$

Μονάδες 2

γ. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2ημx + 3συνx)\, dx$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z+16| = 4|z+1|$$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z \quad 1| = |z \quad i|$$

Μονάδες 9

γ. Να τρέψετε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς που επαληθεύουν συγχρόνως τις σχέσεις των ερωτημάτων (α) και (β).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x \le 1 \\ \left(1-e^{x+1}\right)\ln(x-1), & x \in (1,2] \end{cases}$$

όπου $\alpha \in IR$..

α. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{x+1}}{x-1}$$

Μονάδες 7

β. Να βρείτε το $\alpha \in IR$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=1$.

Μονάδες 11

γ. Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\int_1^x \frac{t\,f(t)}{x^2}dt \quad \text{με } x>0$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞).

Μονάδες 3

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x},\ x>0$$

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 4

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1, x=e.

Μονάδες 5

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \varrho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \varrho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή, τότε να αποδείξετε ότι:

$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1\varrho_2\,[\sigma\upsilon\nu(\theta_1+\theta_2) + i\eta\mu(\theta_1+\theta_2)]$.

Μονάδες 15

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Μονάδες 2

β. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Μονάδες 2

δ. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

Μονάδες 2

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x)\,dx$

Μονάδες 10

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, ορισμένη στο IR., με τύπο

$$f(x)=\frac{|x-z|^2-|x+\overline{z}|^2}{x^2+|z|^2}$$

όπου z συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in$IR, με $\alpha\neq 0$.

α. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f, εάν $|z+1|>|z-1|$.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών και το πλήθος των ριζών της f.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο IR.με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f''(x)f(x)+(f'(x))^2=f(x)f'(x),\ x\in \text{IR}.$$

και $f(0)=2f'(0)=1$.

α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

Μονάδες 12

β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση

$$2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}\,dt=1$$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα [0,1].

Μονάδες 13

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α. όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c \quad , \qquad c \in IR$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

β. κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c \quad , \qquad c \in IR \ .$$

Μονάδες 10

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει πάντα $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 2

β. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f\,'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f\,'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

Μονάδες 2

γ. Μία συνάρτηση $f : A \to IR$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1,\ x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 = x_2, \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2)\ .$$

Μονάδες 2

δ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με συνεχή πρώτη παράγωγο, τότε ισχύει:

$$\int f(x)\cdot g\,'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f\,'(x)\,g(x)\,dx\ .$$

Μονάδες 2

Γ. Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2ο

α. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο (Σ) των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z| = 2 \quad \text{και} \quad \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\ .$$

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι, αν η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z κινείται στο σύνολο (Σ), τότε η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{4}{z}\right)$ κινείται σε ευθύγραμμο τμήμα το οποίο βρίσκεται στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο IR με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^{o}.

Μονάδες 9

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μετά τη 10.00η πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 9

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

β. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

γ. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού IR και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 2

δ. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 2

ε. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in IN$ και $k \geq 2$.

Μονάδες 2

Γ. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: IR \to IR$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in IR$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in IR$.

Μονάδες 13

β. Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to IR$ συνεχής στο διάστημα [α, β] με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και μιγαδικός αριθμός z με $Re(z) \neq 0$, $Im(z) \neq 0$ και $|Re(z)| > |Im(z)|$.

Αν $z+\dfrac{1}{z}=f(\alpha)$ και $z^2+\dfrac{1}{z^2}=f^2(\beta)$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z|=1$

Μονάδες 11

β. $f^2(\beta)<f^2(\alpha)$

Μονάδες 5

γ. η εξίσωση $x^3f(\alpha)+f(\beta)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(-1,\ 1)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\int_0^{\frac{1}{2}}2xf(2xt)\,dt\ .$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-(x+1)$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ .$$

Μονάδες 9

Α.2 Πότε μια συνάρτηση $f:A\to IR$ λέγεται “1-1”;

Μονάδες 4

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

Μονάδες 2

β. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α,x_o) και κοίλη στο (x_o,β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A\left(x_o, f(x_o)\right)$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2

γ. Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

Μονάδες 2

δ. Αν για δύο συναρτήσεις f,g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.

Μονάδες 2

ε. Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών $z, \overline{z}$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

στ. Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \, .$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

$z_1+z_2=4+4i$ και $2z_1 - \overline{z}_2 = 5 + 5i$,

να βρείτε τους z_1, z_2.

Μονάδες 10

β. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w ισχύουν $|z - 1 - 3i| \leq \sqrt{2}$ και $|w - 3 - i| \leq \sqrt{2}$:

i. να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικοί μιγαδικοί αριθμοί z, w έτσι, ώστε z=w και

Μονάδες 10

ii. να βρείτε τη μέγιστη τιμή του $|z - w|$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in$ IR.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".

Μονάδες 7

β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1),

να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$.

Μονάδες 9

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\dfrac{1}{668}x+2005$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: IR→IR, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το λ $\in$IR έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3.$

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στοIR και f΄(x)>f(x) για κάθε x $\in$IR,

να δείξετε ότι:

i. xf(x)>0 για κάθε x$\neq$0.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10.30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι: $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x,\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Α.2 Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|.$$

Μονάδες 2

β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f(x_o)\,g'(x_o) - f'(x_o)\,g(x_o)}{[g(x_o)]^2}.$$

Μονάδες 2

γ. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $[\ell n|x|]' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 2

δ. Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

Μονάδες 2

ε. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \dfrac{1}{f(x)}dx$.

Μονάδες 9

γ. Για κάθε x<0 να αποδείξετε ότι:

$$f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x) .$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z, που ικανοποιούν την ισότητα $(4-z)^{10} = z^{10}$ και η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2+x+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z ανήκουν στην ευθεία x=2.

Μονάδες 7

β. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y΄y στο $y_o=-3$, τότε

i. να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

Μονάδες 9

ii. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, της εφαπτομένης (ε), του άξονα x΄x και της ευθείας $x = \frac{3}{5}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ell n(x+1) - (x+1)\ell nx$ με $x>0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ell n(x+1) - \ell nx < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ell n(1+\frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha} = \alpha^{\alpha+1}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α.2 Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 2

β. Αν f, g, g΄ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α,β], τότε

$$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g'(x)dx .$$

Μονάδες 2

γ. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ, τότε

$$\left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

Μονάδες 2

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Μονάδες 2

ε. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu 3x}{x}, & x<0\\[2ex] x^2+\alpha x+\beta\sigma\upsilon\nu x, & x\geq 0.\end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3$.

Μονάδες 8

β. Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - e\ln x, \quad x > 0.$$

α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \dfrac{2-\bar{z}_1}{2+\bar{z}_1}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδειχθεί ότι $z_2 - z_1 = 1$.

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 6

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta > 0$, να υπολογισθεί ο z_1 και να δειχθεί ότι

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0.$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 10

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ’ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Μονάδες 2

γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

Μονάδες 2

δ. Αν α, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$\alpha+\beta i=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ ή } \beta=0$$

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o} (f(x)-\ell) = 0$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2+\beta z+\gamma=0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta=-1$ και $\gamma=1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3=-1$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w, για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \overline{z_1}|$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x, \quad x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x>0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $k = -\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t\,f(t)\,dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt = F(1)$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0, +∞).

Μονάδες 8

γ. Αν h(1)=2, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)\,dt < 2\int_0^2 tf(t)dt$

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)\,dt = \frac{1}{2}F(1)$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ **9** ΙΟΥΛΙΟΥ **2009**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ**:** ΠΕΝΤΕ **(5)**

ΘΕΜΑ **1ο**

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες **9**

Β. Έστω μια συνάρτηση f και x_o ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_o;

Μονάδες **6**

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει $\overline{(z^{\nu})} = \left(\overline{z}\right)^{\nu}$

Μονάδες **2**

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες **2**

γ. Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_o τότε

$$\lim_{x \to x_o} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Μονάδες **2**

δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{\, x \mid συνx = 0 \,\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{συν^2 x}$$

Μονάδες **2**

ε. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

$$\int f'(x)dx = f(x) + c, \quad x \in Δ$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

Μονάδες **2**

ΘΕΜΑ **2°**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(2-i)\,z + (2+i)\,\bar{z} - 8 = 0$$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x+yi$ οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες **10**

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 οι οποίοι ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες **8**

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα να αποδείξετε ότι $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$

Μονάδες **7**

ΘΕΜΑ **3**°

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

Α. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες **5**

Β. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες **10**

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες **6**

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

Μονάδες **4**

ΘΕΜΑ 4^{ο}

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = k\,x\,e^{2x}\ ,\quad 0 \le x \le 2$$

$$f'(0) = 2f(0),\quad f'(2) = 2f(2) + 12e^{4},\quad f(1) = e^{2}$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^{2} - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}},\quad 0 \le x \le 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες **4**

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

Μονάδες **6**

γ. Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Μονάδες **6**

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^{3}e^{2x},\ 0 \le x \le 2$

Μονάδες **5**

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{1}^{2} \frac{f(x)}{x^{2}}\,dx$$

Μονάδες **4**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ **7** ΙΟΥΛΙΟΥ **2010**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ**:** ΠΕΝΤΕ **(5)**

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in R$, είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $(ημx)' = συνx$

Μονάδες **8**

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες **4**

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες **3**

Α**4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $f(x) = α^x$, $α > 0$, τότε ισχύει $\left(α^x\right)' = xα^{x-1}$

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$

γ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

ε) Για κάθε $z \in C$ ισχύει $|z|^2 = z\bar{z}$

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -2 \text{ και } z_1 \cdot z_2 = 5$$

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2

Μονάδες **5**

Β2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$

Μονάδες **8**

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος Β**2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \text{Re}(w) + \text{Im}(w) = 0$$

Μονάδες **6**

Β4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς w του ερωτήματος Β**2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$

Μονάδες **6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3,\ x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες **5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες **5**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες **6**

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ**3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες **9**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες **4**

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot \int_0^1 f(xt)dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$

Μονάδες **6**

Αν επιπλέον δίνεται ότι

$$f'(x) + 2x = 2x \cdot \left(f(x) + x^2\right), \; x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες **8**

Δ4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t)dt \; , \; x \geq 0$$

και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt + \int_6^4 f(t)dt < 0$$

Μονάδες **7**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης.

5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.

7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 09.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ **6** ΙΟΥΝΙΟΥ **2011**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ**:** ΠΕΝΤΕ (**5**)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{συν}x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\text{συν}x)' = -\text{ημ}x$

Μονάδες **10**

Α2. Έστω μία συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Να διατυπώσετε τον ορισμό της αρχικής συνάρτησης ή παράγουσας της f στο Δ.

Μονάδες **5**

Α**3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$z-\bar{z}=2\beta$$

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z - i| = 1 + \mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w} + 3i) = i(3\overline{w} + i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y = \frac{1}{4}x^2$

Μονάδες **7**

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 2\sqrt{2}$.

Μονάδες **7**

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w.

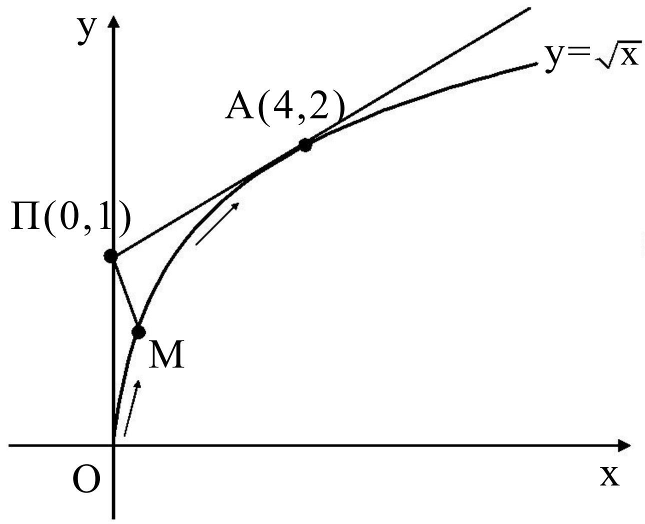
Μονάδες **5**

Β4. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές και, στη συνέχεια, να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό u με εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο το σημείο Λ, έτσι ώστε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β να είναι τετράγωνο.

Μονάδες **6**

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16$m/min

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες **5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες **6**

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

Μονάδες **6**

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες **8**

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: Ρ→Ρ, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in$ Ρ

Δ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες **3**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Ρ.

Μονάδες **5**

Αν επιπλέον $g(x)=f(x)-x$, $x \in$ Ρ, τότε:

Δ3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x g(x)}$

Μονάδες **6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$

Μονάδες **5**

Δ5. Αν το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=e-\frac{5}{2}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 f(x)dx$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$$

Μονάδες **6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ **14** ΙΟΥΝΙΟΥ **2012**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ**:** ΤΕΣΣΕΡΙΣ (**4**)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες **7**

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες **2**

Α**3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες **6**

Α**4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν είναι $0<α<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} α^x = +\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z\neq-1$, για τους οποίους ο αριθμός $w=\frac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z|=1$

Μονάδες **7**

Β2. Ο αριθμός $\left(z-\frac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες **6**

Β3. $\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες **6**

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\frac{i}{w}-w$, $w\neq0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$

Μονάδες **6**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f:ΡØΡ, για την οποία ισχύει:

$$xf(x)+1=e^x, \text{ για κάθε } x \in Ρ.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Μονάδες **6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες **6**

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α $(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2,\ x \in P$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες **8**

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[x(\ell n x)\ell n(f(x))\right]$

Μονάδες **5**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:AØP με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A)=(-\infty,0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και
- $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\displaystyle\int_1^x e^{f(t)} f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)dt$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, $x>0$

Μονάδες **8**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0, F(x_0))$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0, \beta)$ με $\beta>x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi, F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: F(\beta)\,x-(\beta-1)y+2012\,(\beta-1)=0$$

Μονάδες **6**

Δ3. Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]\,x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)\,(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3)

Μονάδες **5**

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x t\,f(t)\,dt, \quad \text{για κάθε} \quad x>0$$

Μονάδες **6**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν_επιτρέπεται__να_γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} (-f(x)) = +\infty$

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|\, x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

Μονάδες 8

B2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

B3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 10 \quad \text{και} \quad |z + w| \leq 10$$

Μονάδες 6

B4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2x f(x) + x^2 (f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \leq f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\,dt = -\xi(3\xi^2 - 1)\,f(\xi^3-\xi)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \displaystyle\int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)}\,dt \right) du$ για κάθε $x > 0$
- $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ με } x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = f(x)\ (f'(x))^3 \text{ με } x \geq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\, f''(x) + 1 = \left(f'(x)\right)^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Μονάδες 4

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0, +\infty)$ (μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$ (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ (μονάδες 2)

β. $\int_0^1 (2 - x)\, f(x)\, dx < 1$ (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο_εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο_πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην_αρχή_των_απαντήσεών_σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να_μην_γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν_σημειώσεις_σας_πάνω_στα_θέματα δεν_θα_βαθμολογηθούν_σε_καμία_περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό__σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho, \ \rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

(μονάδες 2)

γ) Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$

(μονάδες 2)

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

(μονάδες 2)

ε) $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\,g'(x)$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \dfrac{2z - i}{2z + i}$, $\quad z \neq -\dfrac{i}{2}$
- w φανταστικός

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ του κύκλου.

Μονάδες 10

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος Β1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w| = 1$

Μονάδες 8

Β3. Αν είναι $z = \dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i\,w^7 = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \text{ αν } x>0 \\ 0 & , \text{ αν } x=0 \end{cases}$$

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Μονάδες 7

Γ3. i) Να αποδείξετε ότι, για $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=f(4) \Leftrightarrow x^4=4^x$$

(μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4=4^x$, $x>0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$

(μονάδες 6)

Μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(2,\ 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)\,dt = f(\xi)\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad A = (0, +\infty)$$

με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3) Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 (μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων Α, Β γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ, και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $z\in\mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu$, όπου ν θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε πάντοτε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z-3i|^2 - 18 = |z-3|^2$
- $|w-i| = \mathrm{Im}(w)+1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-3=0$

Μονάδες 9

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 9

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1} - \ln x,\ x \in (0,+\infty)$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με

$$g(x)=\int_{1}^{h(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt,$$

όπου $h(x)=f(x^2+1)-f(2)+1$.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

Μονάδες 6

Γ4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι $x_1<x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_1,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2-x)\cdot f'(x)+x\cdot f(x)=1, \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & 0<x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{1}^{x} f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(t)}{t}dt, \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

Μονάδες 4

Δ3. **α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = -\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f(t)}{t}\,dt,\ x \in (0, +\infty)$$

είναι κοίλη. (μονάδες 5)

β. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$. Να αποδείξετε ότι $E < 2$. (μονάδες 4)

Μονάδες 9

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)\,dt \geq \frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} t f(t)\,dt,\ \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}\, x-1}{x}=1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

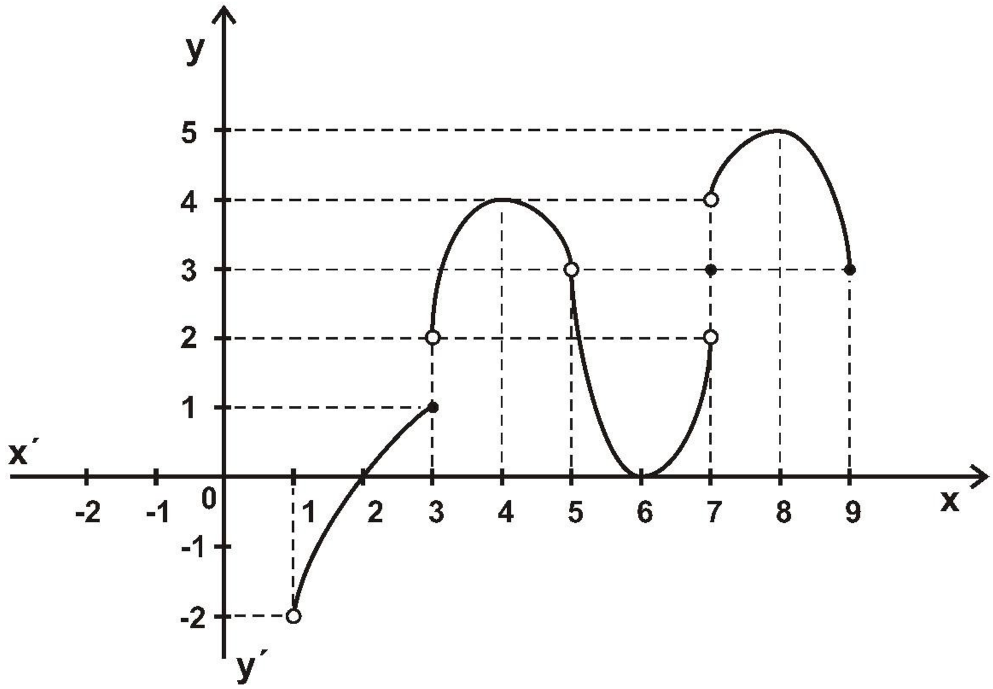
ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

αν $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx>0$, τότε $f(x)>0$ στο $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



Β1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 2

Β2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o) = 0$.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει:

$$f(\eta\mu\, x)>f\left(x-\frac{1}{6}x^3\right).$$

Μονάδες 9

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3,\ x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. (μονάδες 2)

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_o=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Μονάδες 8

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

(μονάδες 3)

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_o^2 - 2x_o + 2}{2}.$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1) + F(x^2), \quad \text{για κάθε } x > 1.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 5 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ_Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_o)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α). (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = G(\alpha) - G(\beta)$.

β) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

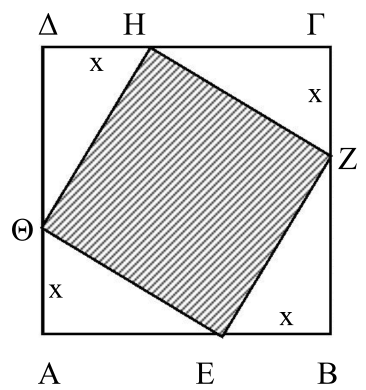
γ) Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ΄(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1}.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν f(α) = f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β



Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:

Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4,\ \ 0 \le x \le 2$$

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

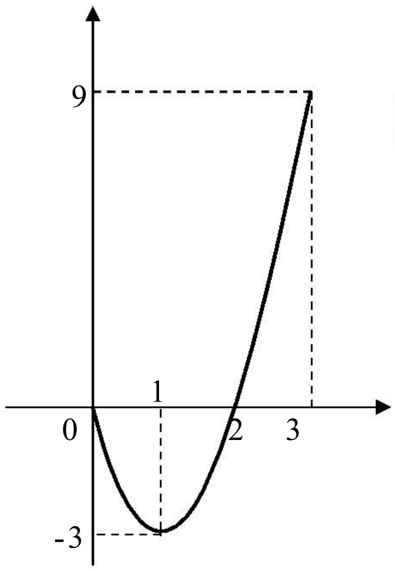
Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o} + 1$ cm^2.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Μονάδες 8

Γ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (\quad)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\eta\mu x}{x}+\alpha, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0 \\ 2, & x=0 \\ x^3-3x^2+2, & x>0. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Μονάδες 2

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)\,dx < \frac{3\pi}{2}-1$.

Μονάδες 7

Δ5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot x\right)=f\left(-\frac{\pi}{2}\cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο $(0,1)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ_Α

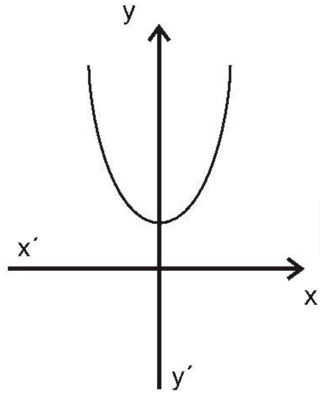
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β).

Μονάδες 7

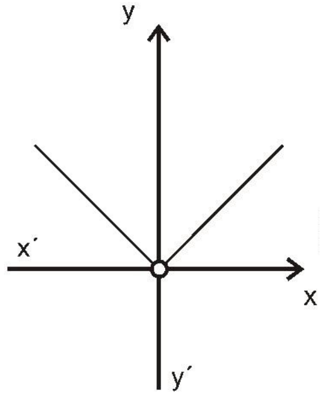
Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του ○. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 4

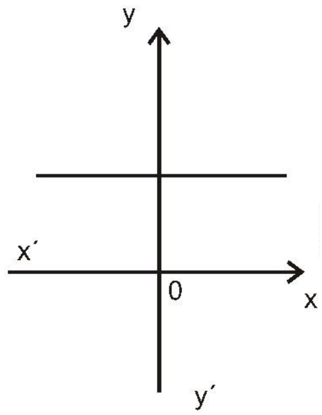
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



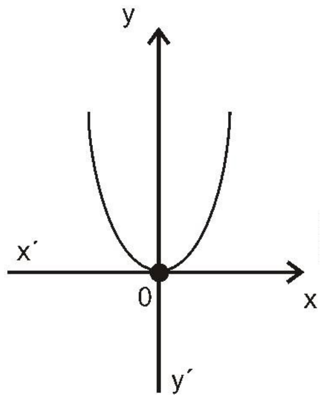
(f)



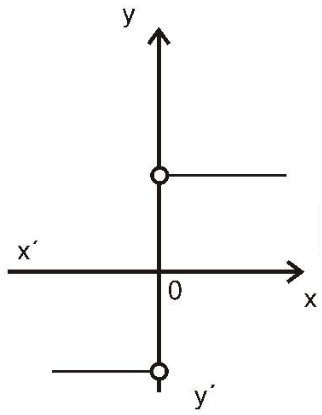
(g)



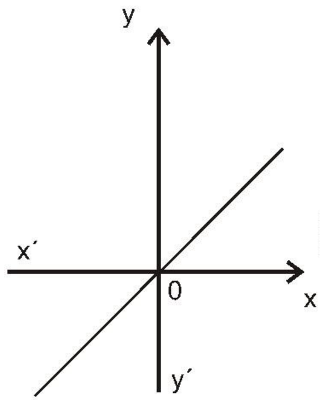
(F)



(G)



(Η)



(Τ)

Να γράψετε στο τετράδιο σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ‘1-1’, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και σύνολο τιμών το $[2, 3]$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+\alpha, & x\le 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Μονάδες 3

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, 4\right]$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 7

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=2\,\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o \in [0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu\, x\, dx$.

Μονάδες 8

Γ4. α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$. (μονάδες 2)

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\,[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x]$ (μονάδες 5)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,\,1)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0,\quad \text{όπου} \quad 0<\alpha<1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα $(0,\,1)$ και μία στο διάστημα $(1,\,2)$.

Μονάδες 5

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2<F(1)<\ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

Μονάδες 5

.

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim_{x \to x_o} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και

$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$.

Μονάδες 6

Β3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,\ 1)\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,\ 2]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,\ 1)$. Έστω το σημείο $A(\frac{3}{2},\ 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x},\quad x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο Μ είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο Α τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία ανήκει στο $(0, 1)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 3x + 1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(1 - x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ ισούται με $\dfrac{1}{2}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση

$$f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = f(\varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}).$$

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = -\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, για κάθε x<0.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

Μονάδες 5

Β2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

Μονάδες 6

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) \square 2 \le h(x) \le g(x) \square 2$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$ (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{h(x) + 7} - 3}{h^2(x) - 4}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

Γ2. Έστω (ε): y=3x-2 η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Μ(0,α) με -2<α<2. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες x=-1 και x=+1 υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 9

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Ν(-2, -8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu^3 x + f'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in (0,\frac{\pi}{2})$,
- $f(\frac{\pi}{3}) = \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\cdot \eta\mu x - \varepsilon\varphi x,\ \ x \in (0,\frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x},\ x \in (0,\frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2, με $\rho_1 < \rho_2$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_o) και $f'(x) < 0$ στο (x_o, β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_o$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο , ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in$.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(Μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α)**.

(Μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α5. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις f και g , ισχύει f .

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_o} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_o, ισχύει $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) < \lim\limits_{x \to x_o} g(x)$.

γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο [α, β], η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο [α, β].

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = (x \square \alpha)^3 \square 1,\quad x \in [\square 1,\ \square \infty),$ και

$g(x) = x^2 \square 1,\ x \in$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 0$ είναι ίση με 2, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της, $f^{\square 1}$.

Μονάδες 8

Αν $f^{\square 1}(x) = \ x \square 1 \square 1,\ x \in \square[\ 1, \square \infty)$, τότε:

Β3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{\square 1}$.

Μονάδες 6

Β4. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \to \square 1} \frac{f^{\square 1}(x) \ \square\ 1}{(f^{\square 1}}$$, όπου $(f^{\square 1}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο ΜΝ = 4 cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και 2y cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, είναι $E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4}$, $x \in (0, 2)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^x,\quad x \in (0, 2),$$

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$x \cdot f(x) = \text{συν}x - 1.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x}, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Μονάδες 3

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\mathbf{I} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

Μονάδες 4

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2020 \cdot \sigma\upsilon\nu x - x = 2020$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 4

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0) = \rho$, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **(Δ4)**. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει:

$$\pi \cdot |F(x)| \leq 2 \cdot |x|.$$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ **7** ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ **2000**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Θέμα **1**ο

Α.**1** . Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου **Ω** ισχύει

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Μονάδες **6,5**

Α.**2** . Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες

α. $P(A \cup B) = \ldots$

όταν τα Α , Β είναι ασυμβίβαστα

β. $P(A') = \ldots.$

Όπου Α΄ είναι το συμπληρωματικό του Α

Μονάδες **6**

Β.

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης με $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$, $P(\omega_5) = \frac{1}{2}$

α. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση

Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι

Α : $\frac{1}{2}$, Β : $\frac{1}{6}$, Γ : $\frac{1}{3}$, Δ : $\frac{1}{12}$, Ε : $\frac{1}{8}$

Μονάδες **6,5**

β. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α ={ ω_1 , ω_3, ω_5} και Β={ ω_1 , ω_3}
του δειγματικού χώρου **Ω**

Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A \cup B)$	**1.** $\frac{1}{4}$
β. $P(A \cap B)$	**2.** $\frac{7}{24}$
γ. $P(A')$	**3.** $\frac{23}{24}$
	4. $\frac{1}{6}$

Μονάδες **6**

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7}$, όπου **x** πραγματικός αριθμός

α. Να βρείτε την $\mathbf{f'(x)}$

Μονάδες **5**

β. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης **f** στα οποία η παράγωγος είναι **0**

Μονάδες **10**

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της **f**

Μονάδες **10**

Θέμα 3^o

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται το μορφωτικό επίπεδο των **400** εργαζομένων μίας επιχείρησης σε τέσσερις κατηγορίες **.**

Α΄ κατηγορία **:** Απόφοιτοι του γυμνασίου

Β΄ κατηγορία **:** Απόφοιτοι Λυκείου

Γ΄ κατηγορία **:** Πτυχιούχοι ανώτατης εκπαίδευσης

Δ΄ κατηγορία **:** Κάτοχοι μεταπτυχιακού τίτλου

Κάθε εργαζόμενος ανήκει σε μία μόνο από τις παραπάνω κατηγορίες

Στη Α΄ κατηγορία ανήκει το **25%** των εργαζομένων της επιχείρησης **.**

Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στους εργαζόμενους της Δ΄ κατηγορίας είναι **18^o.**

Οι εργαζόμενοι της Β΄ κατηγορίας είναι εξαπλάσιοι των εργαζόμενων της Γ΄ κατηγορίας **.**

α. Να υπολογίσετε τον αριθμό των εργαζομένων κάθε κατηγορίας

Μονάδες **20**

β. Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα συχνοτήτων

Μονάδες **5**

Θέμα 4^o

Στις **12** το μεσημέρι η θερμοκρασία **(**σε βαθμούς κελσίου**)** δύο πόλεων Α και Β το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου ήταν

Πόλη Α **: 20, 18, 20, 17, 18, 17, 16, 17, 16, 10**

Πόλη Β **: 18, 16, 17, 15, 16, 12, 16, 17, 20, 22**

α. Να βρείτε την μέση τιμή **,** την διάμεσο και την επικρατούσα τιμή της θερμοκρασίας των πόλεων Α και Β

Μονάδες **9**

β. Αν η τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών **(** σε βαθμούς κελσίου**)** των πόλεων Α και Β είναι $S_A = 2{,}66$ και $S_B = 2{,}59$ αντίστοιχα **,** να δικαιολογήσετε σε ποια από δύο πόλεις οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά

Μονάδες **6**

γ**.** Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση της θερμοκρασίας στην πόλη Α **,** παρουσίαζε λόγω κατασκευαστικού λάθους αυξημένη θερμοκρασία κατά **5** βαθμούς **.**

Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της πόλης Α **,** να βρείτε σε ποια από τις δύο πόλεις Α και Β οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια **.** Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας **.**

Μονάδες **10**

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6,5

Α.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$

β. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

γ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$, $(g(x) \neq 0)$

δ. $(x^{\rho})' = \rho \cdot x^{\rho - 1}$, ρ ρητός, $x>0$

ε. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

στ. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

Β.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α Συνάρτηση f	Στήλη Β Πρώτη παράγωγος της f
α. $2\sqrt{x}+\ln 2$, $x>0$	1. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}$
β. $\frac{ημx}{x}$, $x\neq 0$	2. $3συν3x$
γ. $ημ3x$	3. $\frac{ημx-xσυνx}{x^2}$
	4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$
	5. $\frac{xσυνx-ημx}{x^2}$
	6. $-3συν3x$

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν $f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^4$ και $f'(α)=27$, όπου α πραγματικός αριθμός, τότε να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου (°C).

Τιμές Θερμοκρασίας x_i	Πλήθος Ημερών v_i
22	2
23	4
24	
25	
26	2
27	3

Α. Αν γνωρίζουμε ότι η μέση θερμοκρασία των παραπάνω ημερών είναι 24,4 °C, τότε:

α. να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C

Μονάδες 10

β. να υπολογίσετε την επικρατούσα τιμή και τη διάμεσο.

Μονάδες 5

Β. Αν γνωρίζουμε ότι η διάμεσος είναι 24,5 °C, να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία 24 °C και πόσες 25 °C.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Το βάρος των αποσκευών καθενός εκ των 80 επιβατών μιας πτήσης κάποιας Αεροπορικής Εταιρείας είναι τουλάχιστον 11 κιλά αλλά μικρότερο από 26 κιλά. Γνωρίζουμε ότι 8 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 14 κιλά, το 30% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος μικρότερο από 17 κιλά, 48 επιβάτες έχουν αποσκευές με βάρος μικρότερο από 20 κιλά και 15% των επιβατών έχει αποσκευές με βάρος τουλάχιστον 23 κιλά.

α. Να παρασταθούν τα δεδομένα σε έναν πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 10

β. Κάθε επιβάτης δικαιούται να μεταφέρει αποσκευές με βάρος μικρότερο των 20 κιλών, διαφορετικά έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση. Να βρείτε τι ποσοστό από τους 80 επιβάτες της πτήσης αυτής έχει πρόσθετη οικονομική επιβάρυνση.

Μονάδες 7

γ. Να βρεθούν οι γωνίες των αντιστοίχων κυκλικών τομέων του κυκλικού διαγράμματος σχετικών συχνοτήτων, για τα δεδομένα του προβλήματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω Α το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική γλώσσα και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι:

$$P(\Gamma\text{-}A) \leq \frac{3}{5}$$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.

Μονάδες 8

δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

Μονάδες 7

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Πότε μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της και πότε γνησίως φθίνουσα;

Μονάδες 4

Α3. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 10

Β1. Σε μια κατανομή συχνοτήτων οι τιμές της μεταβλητής είναι $x_1, x_2, \ldots, x_k$ με συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ αντίστοιχα και ν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

Πώς ορίζεται η μέση τιμή x ;

Μονάδες 4

Β2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το κείμενο που ακολουθεί συμπληρώνοντας τα υπάρχοντα κενά.

Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ενός συνόλου δεδομένων δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας) $w_1, w_2, ..., w_\nu$ τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον .... μέσο ή ....

μέσο που βρίσκεται από τον τύπο $\bar{x}$ = ...

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x(2-x)$, $\alpha \in IR$.

Α. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $O(0, f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $45°$.

Μονάδες 10

Β. Για $\alpha=1/2$, να βρείτε:

α. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $(1, f(1))$.

Μονάδες 5

β. τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων, που παρουσιάζει τη βαθμολογία μίας ομάδας μαθητών στο μάθημα της Ιστορίας. Η βαθμολογία κυμαίνεται από 10 μέχρι 20. Δίνεται ότι 10 μαθητές έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 12 και μικρότερο του 14.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των μαθητών είναι 50.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 7

δ. Επιλέγουμε τυχαία από το δείγμα των 50 μαθητών ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $\Omega=\{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

Α. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω.

i) $P(k)=\dfrac{1}{k}$ ii) $P(k)=\dfrac{1}{2^k}$ iii) $P(k)=\dfrac{1}{2k}$

Μονάδες 8

Β. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ είναι οι ακόλουθες:

$$1,\ 1,\ 7,\ k,\ k,\ 3,\ 3,\ 3$$

όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω, με πιθανότητα $P(k) = \dfrac{1}{2k}$.

Δίνονται τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω, όπου

$A=\{k \in \Omega$: η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής Χ είναι $M_0=3\}$ και

$B=\{k \in \Omega$: η μέση τιμή $x = 2,5\}$.

α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα Α και Β.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ
ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ **3** ΙΟΥΛΙΟΥ **2003**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (**4**)

ΘΕΜΑ **1**ο

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου **Ω**, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες **9**

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το :

α. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$

γ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$ και το όριο αυτό είναι πραγματικός αριθμός

δ. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)+f(h)}{h}$, $h \in R$, $h \neq 0$.

Μονάδες **5**

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι :

α. το εύρος
β. η διάμεσος
γ. η διακύμανση
δ. η τυπική απόκλιση.

Μονάδες **5**

Δ. Να ορίσετε το συντελεστή μεταβολής ενός συνόλου παρατηρήσεων.

Μονάδες **6**

ΘΕΜΑ **2**ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες **5**

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f, όταν x=3, ισούται με $\frac{3\ 2}{4}$.

Μονάδες **10**

γ. Αν $h(x) = \frac{f(x) - 3}{x - 2}$ για $x \neq 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \to 2} h(x)$.

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ **3**ο

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5.

Αν Α΄, Β΄ είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες :

α. $P(A)$, $P(B)$

Μονάδες **6**

β. $P(A \cup B)$

Μονάδες **6**

γ. $P(A \cup B')$

Μονάδες **6**

δ. $P((A' \cap B) \cup (A \cap B'))$

Μονάδες **7**

ΘΕΜΑ **4**ο

Το βάρος ενός δείγματος μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική ή περίπου κανονική κατανομή.
Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες **6**

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες **6**

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος, που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Μονάδες **6**

δ. Ο αριθμός των μαθητών του δείγματος αυτού που έχουν βάρος από 55 Kg έως 60 Kg, είναι 27. Να υπολογίσετε το σύνολο των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες **7**

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζό**μ**ενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να_μην_τα_αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά_άλλη σημείωση_δεν_επιτρέπεται_να_γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης μετά τη 10:00 πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ **7** ΙΟΥΛΙΟΥ **2004**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (**3**)

ΘΕΜΑ **1ο**

Α. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, τότε να αποδείξετε ότι $P(A) \leq P(B)$.

Μονάδες **7**

Β. **α.** Πότε ένα πείραμα ονομάζεται πείραμα τύχης;
β. Να δώσετε τον ορισμό του δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης.

Μονάδες **6**

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$,
τότε $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell_1 \ell_2$.

β. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

γ. Ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

δ. Ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$.

ε. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A') = 1 + P(A)$.

στ. Το μέτρο διασποράς εύρος ισούται με τη διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης από τη μέγιστη παρατήρηση.

Μονάδες **12**

ΘΕΜΑ **2**ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x+2}{e_x}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Μονάδες **9**

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\,'(x) = \dfrac{1}{e_x}$.

Μονάδες **8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (0, f(0)).

Μονάδες **8**

ΘΕΜΑ **3**ο

Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

Μονάδες **12**

β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

Μονάδες **13**

ΘΕΜΑ **4**ο

Έστω **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγματικός χώρος της ρίψης ενός μη αμερόληπτου ζαριού και η συνάρτηση $f: IR \to IR$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 4x + 2 \text{ , όπου } k \in \Omega.$$

Αν P(1) = P(3) = P(5) = 2P(2) = 4P(4) = 2P(6), τότε να βρείτε:

α. Τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων P(1), P(2), P(3), P(4), P(5), P(6).

Μονάδες **8**

β. Τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β, όπου
Α: «Η ένδειξη του ζαριού είναι άρτιος αριθμός»
Β: «Η ένδειξη του ζαριού είναι περιττός αριθμός».

Μονάδες **8**

γ. Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ, όπου
Γ: «Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$» .

Μονάδες **9**

ΟΔΗΓΙΕΣ_ΓΙΑ_ΤΟΥΣ_ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να_μην_τα_αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά_άλλη σημείωση_δεν_επιτρέπεται_να_γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ **8** ΙΟΥΛΙΟΥ **2005**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (**4**)

ΘΕΜΑ **1**ο

Α.1. Δίνονται οι συναρτήσεις $F(x)$, $f(x)$ και $g(x)$ με $F(x) = f(x)+g(x)$.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες **9**

Α.2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x, αν $\bar{x} > 0$ και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες **4**

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες **2**

β. Αν $x>0$, τότε $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Μονάδες **2**

γ. Στην περίπτωση των ποσοτικών μεταβλητών, εκτός από τις συχνότητες f_i και v_i, χρησιμοποιούνται και οι λεγόμενες αθροιστικές συχνότητες F_i, N_i.

Μονάδες **2**

δ. Τα σπουδαιότερα μέτρα διασποράς μιας μεταβλητής είναι η μέση τιμή και η διάμεσος αυτής.

Μονάδες **2**

ε. Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου **Ω** με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα ισχύει Ρ(Α)=Ρ(Β), τότε είναι πάντοτε Ν(Α)=Ν(Β).

Μονάδες **2**

στ. Η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης αναφέρεται μόνο σε σημεία του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες **2**

ΘΕΜΑ **2**ο

Δ
ίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x - \beta x^2$ με $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες **3**

β. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε x, το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες **5**

γ. Να βρείτε τα α και β, ώστε η εφαπτομένη στο σημείο Α(1,1) της γραφικής παράστασης της f να είναι y=3x-2 .

Μονάδες **10**

δ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 2} (f'(x) \cdot x^3)$.

Μονάδες **7**

ΘΕΜΑ **3ο**

Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 50% των παρατηρήσεων έχουν τιμή μεγαλύτερη του 20. Το 81,5% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα (16,22) με άκρα του διαστήματος χαρακτηριστικές τιμές της κανονικής κατανομής $\bar{x} \pm 3s$, $\bar{x} \pm 2s$, $\bar{x} \pm s$, $\bar{x}$.

α. Να δείξετε ότι $\bar{x} = 20$ και $s = 2$.

Μονάδες **10**

β. Να βρείτε το $\alpha \in N^*$, αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $(\bar{x} - \alpha \cdot s, \bar{x} + \alpha \cdot s)$ ανήκει το 95% περίπου των παρατηρήσεων.

Μονάδες **5**

γ. Αν R είναι το εύρος της κατανομής, να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \frac{R}{2} x^2 - (\bar{x} + 4)\, x + 9s$.

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ **4ο**

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Για τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ του Ω είναι

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A \cap B = \{1,3,4\}$, $A - B = \{2,6\}$ και

$\Gamma = \left\{ x \in \Omega \,/\, \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \right\}$.

α. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Γ).

Μονάδες **9**

β. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί το Β και όχι το Γ.

Μονάδες **3**

γ. Να βρείτε την πιθανότητα, ώστε να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Β και Γ.

Μονάδες **3**

δ. Αν s^2 είναι η διακύμανση των τιμών λ, 3λ, 5λ, όπου $\lambda \in \Omega$, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Delta = \{\lambda \in \Omega \,/\, s^2 > 24\}$.

Μονάδες **10**

ΟΔΗΓΙΕΣ_ΓΙΑ_ΤΟΥΣ_ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται__να_γράψετε_καμιά_άλλη_σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την **10.30΄** πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ενός δειγματικού χώρου **Ω**, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A).$$

Μονάδες 9

Β.1 Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 3

Β.2 Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 3

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

α. Το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

Μονάδες 2

β. Ισχύει: (συνx)΄ =ημx, για κάθε $x \in IR$.

Μονάδες 2

γ. Ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των δεδομένων.

Μονάδες 2

δ. Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 2

ε. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Τότε ισχύει: $P(\varnothing) \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(\alpha x^2+\beta x+9)$ με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(2,e^2)$ είναι $y = -e^2x+3e^2$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-6$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Μία Τράπεζα χορηγεί διαφόρων τύπων δάνεια στους πελάτες της. Αν επιλεγεί τυχαία κάποιος πελάτης η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό ή μόνο καταναλωτικό δάνειο είναι 0,7 ενώ η πιθανότητα να μην έχει πάρει κανένα από τα δύο προηγούμενα δάνεια είναι 0,1.

α. Να βρείτε την πιθανότητα ένας πελάτης να έχει πάρει και τα δύο δάνεια. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα «έχει πάρει στεγαστικό» και «έχει πάρει καταναλωτικό» είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 15

β. Αν επιπλέον η πιθανότητα να έχει πάρει μόνο στεγαστικό είναι 0,6 να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i. «έχει πάρει καταναλωτικό».

ii. «έχει πάρει μόνο καταναλωτικό».

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Οι απουσίες των μαθητών της Γ΄ τάξης ενός Ενιαίου Λυκείου κατά τους μήνες Ιανουάριο – Φεβρουάριο – Μάρτιο – Απρίλιο του έτους 2006 έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους και εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Απουσίες μαθητών	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετική συχνότητα f_i
[… – …)	…	0,1
[… – 7)	…	…
[… – …)	…	0,3
[… – …)	10	…
Σύνολο	//////////////////////	1

Αν επιπλέον δίνεται ότι η σχετική συχνότητα της $4^{ης}$ κλάσης f_4 είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της $2^{ης}$ κλάσης f_2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το πλάτος c των κλάσεων ισούται με 2.

Μονάδες 10

β. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα σχετικών συχνοτήτων στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 5

γ. i. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 4

ii. Να βρείτε την τυπική απόκλιση s.

Μονάδες 6

Δίνεται ο τύπος: $$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \nu_i\right)^2}{\nu}\right].$$

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά_άλλη σημείωση_δεν_επιτρέπεται_να_γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας_σε_όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ **29** ΙΟΥΝΙΟΥ **2007**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(**4**)

ΘΕΜΑ **1**ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες **8**

Β. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου **Ω**.

Μονάδες **4**

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ **ii)** $P(\varnothing)$.

Μονάδες **3**

Γ1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση.*

α. Έστω ότι έχουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και ότι f_i, $i=1,2,\ldots,κ$, είναι οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών x_i μιας μεταβλητής. Αν $α_i$ είναι το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε:

$$α_i=360\cdot f_i, \text{ για } i=1,2,..,κ.$$

Μονάδες **2**

β. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x)\neq 0$, τότε ισχύει $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$.

Μονάδες **2**

γ. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες **2**

Γ**2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$f_1(x)=e^x$ όπου x πραγματικός.

$f_2(x)=\frac{1}{x}$ όπου $x\neq 0$.

$f_3(x)=\eta\mu x$ όπου x πραγματικός.

$f_4(x)=c$ όπου x πραγματικός και c σταθερά.

Μονάδες **4**

ΘΕΜΑ **2**ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=\frac{x}{x^2-x+1}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).

Μονάδες **5**

β. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x\to -1} f(x)$.

Μονάδες **8**

γ. Να εξετασθεί η συνάρτηση f(x) ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

Μονάδες **12**

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{x \in \Omega / \ 0 \le \ln(x-1) < \ln 3\},$$

$$B = \{x \in \Omega / \ (x^2 - 5x)\cdot(x-1) = -6\,(x-1)\}.$$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(B \cup A')$.

Μονάδες **8**

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$.

Μονάδες **7**

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας $P(X)$, όπου Χ είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$.

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω $x_1, x_2, ..., x_{11}$ ένα δείγμα με παρατηρήσεις:

7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3,

όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha<\beta<\gamma$. Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $x = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$.

Μονάδες **8**

β. Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να δειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος είναι ίση με $s_x = \frac{58}{11}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες **8**

γ. Έστω y_1, y_2, ..,y_{11} οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις x_1,x_2, .., x_{11} επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2. Αν $y=9$ και $s_y=2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2.

Μονάδες **9**

ΟΔΗΓΙΕΣ_ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Να_μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη_σημείωση_δεν_επιτρέπεται__να_γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό__σας_σε_όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ **1** ΙΟΥΛΙΟΥ **2008**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (**5**)

ΘΕΜΑ **1ο**

Α. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Μονάδες **9**

Β. α. Να δώσετε τον ορισμό της διακύμανσης των παρατηρήσεων $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ μιας μεταβλητής X.

Μονάδες **3**

β. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ασυμβίβαστα;

Μονάδες **3**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες **2**

β. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

Μονάδες **2**

γ. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ_1, δηλαδή αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \ell_1$, τότε

$$\lim_{x \to x_o} (f(x))^{\nu} = \ell_1{}^{\nu}$$ (ν θετικός ακέραιος).

Μονάδες **2**

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες **2**

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες **2**

ΘΕΜΑ **2ο**

Η μέση βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα τεστ είναι 70. Χωρίζουμε τη βαθμολογία σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [−)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική συχνότητα f_i
20 – 40			
40 – 60			
60 – 80			
80 – 100			
Σύνολα			

Δίνεται επιπλέον ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 20 έως 40 είναι ίσο με το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμό από 40 έως 60, ενώ στο κυκλικό διάγραμμα των δεδομένων, η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση από 80 έως 100 είναι 108^o.

α. Να δείξετε ότι $f_1 = f_2 = \frac{1}{10}$, $f_3 = \frac{5}{10}$, $f_4 = \frac{3}{10}$.

Μονάδες **10**

β. Αν ο αριθμός των μαθητών της τάξης είναι 50, τότε:

i. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα συχνοτήτων και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Μονάδες **5**

ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έχουν βαθμολογία τουλάχιστον 60.

Μονάδες **5**

iii. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχουν βαθμολογία από 50 έως 70.

Μονάδες **5**

ΘΕΜΑ **3ο**

Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και p ένας πραγματικός αριθμός με $0 < p < 1$. Δίνεται ότι οι πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$ είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και αποτελούν στοιχεία του συνόλου

$$\{p - 1, p, p + 1, p^2, p^3\}.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A) = p^2$, $P(A \cup B) = p$ και $P(A \cap B) = p^3$.

Μονάδες **9**

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = p^3 - p^2 + p$.

Μονάδες **8**

γ. Να αποδείξετε ότι $P(B - A) > P(A - B)$.

Μονάδες **8**

ΘΕΜΑ **4ο**

Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της (Σχήμα 1). Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος.

Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

Σχήμα 1

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{1}{2}x^2 .$$

Μονάδες **6**

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματόπλεγμα των 200 m.

Μονάδες **7**

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$.

Μονάδες **5**

δ. Έστω CV ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών $f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$ και CV' ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά c, όπου $c \neq 2$. Να υπολογίσετε το c, έτσι ώστε να ισχύει $CV' = 2CV$.

Μονάδες **7**

ΟΔΗΓΙΕΣ_ΓΙΑ_ΤΟΥΣ_ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:00΄ πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ **7** ΙΟΥΛΙΟΥ **2009**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (**5**)

ΘΕΜΑ **1ο**

Α. Να δείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α′ ενός δειγματικού χώρου, ισχύει

$$P(A')=1-P(A)$$

Μονάδες **9**

Β. α. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες **3**

β. Αν $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ σε δείγμα μεγέθους ν, να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες **3**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό ℓ, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ τότε για κάθε φυσικό αριθμό ν μεγαλύτερο του 1 θα ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu}=\nu^{\ell\nu-1}$

Μονάδες **2**

β. Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in Ρ$, ισχύει $f'(x) = e^x$

Μονάδες **2**

γ. Η διάμεσος ενός δείγματος παρατηρήσεων είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτήν.

Μονάδες **2**

δ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων για ένα χαρακτηριστικό είναι κανονική ή περίπου κανονική με τυπική απόκλιση s και εύρος R, τότε ισχύει $s \approx 6R$

Μονάδες **2**

ε. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο.

Μονάδες **2**

ΘΕΜΑ **2ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 8$, όπου α ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -7$, να βρεθεί η τιμή του α

Μονάδες **5**

β. Έστω α=1

i. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{x-2}$

Μονάδες **10**

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ **3ο**

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν=72 με αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ν_1, ν_2, ν_3, ν_4, όπου $\nu_4 = 3\nu_3$. Δίνεται επίσης ότι τα τόξα του κυκλικού διαγράμματος συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις τιμές x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα $50°$ και $30°$.

α. Να βρεθούν οι συχνότητες ν_i, i=1,2,3,4

Μονάδες **10**

β. Να βρεθούν τα τόξα που αντιστοιχούν στις τιμές x_3 και x_4

Μονάδες **8**

γ. Δίνεται ότι $x_1 < -7$, $x_2 = -7$, $x_3 = 3$, και $x_4 > 3$. Να δειχθεί ότι

$$10R + 72\bar{x} = 52\delta$$

όπου R, $\bar{x}$, δ είναι αντίστοιχα το εύρος, η μέση τιμή και η διάμεσος των παρατηρήσεων.

Μονάδες **7**

ΘΕΜΑ **4ο**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \nu^3 x + \dfrac{4}{x^2}$, $x \in (0,1)$, όπου ν ακέραιος αριθμός με ν >2

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες **8**

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα και να δειχθεί ότι $f(x) \geq 3\nu^2$ για κάθε $x \in (0,1)$

Μονάδες **5**

Β. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο **Ω** = {1, 2, ..., ν} με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και το ενδεχόμενό του, Α για το οποίο ισχύει

$$\nu^3 P(A) + \frac{4}{(P(A))^2} = 3\nu^2 \quad \text{και} \quad N(A)=\nu^2-9\nu-8$$

όπου P(A) είναι η πιθανότητα του A και N(A) το πλήθος των στοιχείων του A

α. Να δείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{5}$

Μονάδες **7**

β. Αν επιπλέον Β είναι ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου **Ω** με $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα του ενδεχομένου $A' \cup B$

Μονάδες **5**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.

4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.

5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ **5** ΙΟΥΛΙΟΥ **2010**
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (**4**)

ΘΕΜΑ Α

Α**1.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και $c \in R$, να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$, $x \in \Delta$.

Μονάδες **9**

Α**2.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες **3**

Α**3.** Πώς ορίζεται ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;

Μονάδες **3**

Α**4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το Α, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ έχει πάντα πεδίο ορισμού το Α

β) Ισχύει $\lim\limits_{x \to x_0} (\text{συν}x) = \text{συν}x_0$

γ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους οι διαδοχικές κεντρικές τιμές των κλάσεων διαφέρουν μεταξύ τους όσο και το πλάτος κάθε κλάσης.

δ) Σε μια ομαδοποιημένη κατανομή με κλάσεις ίσου πλάτους το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος ν του δείγματος.

ε) Αν P(A) είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου

$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa\} \neq$ «, τότε

$$P(A) = P(\alpha_1) + P(\alpha_2) + \ldots + P(\alpha_\kappa)$$

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ **Β**

Οι βαθμοί 60 μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών κυμαίνονται από 10 έως 20 και έχουν ομαδοποιηθεί σε 5 κλάσεις ίσου πλάτους. Αν:

- Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην κλάση [14, 16) του κυκλικού διαγράμματος είναι 144^o
- Οι σχετικές συχνότητες των δύο πρώτων κλάσεων είναι ίσες.
- 48 μαθητές πήραν βαθμό έως 16 και
- 6 μαθητές πήραν βαθμό τουλάχιστον 18, τότε:

Β**1.** Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα σωστά συμπληρωμένο.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ [-)	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ ν_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ f_i %
ΣΥΝΟΛΟ				

Μονάδες **10**

Β**2.** Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες **6**

Β3. Να βρείτε πόσοι μαθητές πήραν βαθμολογία από 10 έως 14

Μονάδες **4**

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που πήραν βαθμολογία τουλάχιστον 17

Μονάδες **5**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενά του $A = \{\omega_1, \omega_3\}$ και $B = \{\omega_2, \omega_4\}$

Αν είναι $P(A-B) = \dfrac{\nu+1}{\nu+4}$ και $P(B-A) = \dfrac{\nu-1}{2\nu}$

όπου ν θετικός ακέραιος, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $P(A-B) = P(A)$ και $P(B-A) = P(B)$

Μονάδες **6**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ν=4

Μονάδες **10**

Γ3. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α και Β

Μονάδες **4**

Γ4. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α΄»Β΄

Μονάδες **5**

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{1}{300s^2}\left(t - \bar{x}\right)^3, \quad t \in R \quad \text{και} \quad s \neq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες **5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος για $t = \bar{x}$ και να βρείτε την ελάχιστη τιμή του.

Μονάδες **6**

Δ3. Αν $f'(0)=1$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV των παραπάνω παρατηρήσεων και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες **8**

Δ4. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των αριθμών $f'(t_1), f'(t_2), \ldots, f'(t_\nu)$ είναι ίση με $\frac{1}{100}$

Μονάδες **6**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 9:30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου **Ω** να αποδείξετε ότι:
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

Μονάδες 7

Α2. Έστω ένας δειγματικός χώρος **Ω**$=\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu\}$ με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της Α;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν x>0, τότε $(\quad x)'=\frac{1}{x}$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

γ) Η αθροιστική συχνότητα N_i μίας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

δ) Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(x - s,\ x + s)$, όπου x η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

ε) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $_{o}C$) σε μια περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t)=t-4\ t+\alpha$, όπου $\alpha \in Ρ$ και $t \in (0,24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Β1. Να αποδείξετε ότι για $t \in (0,4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4,24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε την τιμή του α, αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι $-1\ ^{o}C$.

Μονάδες 6

Β3. Για $\alpha=3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι $0\ ^{o}C$.

Μονάδες 5

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{t \to 4} \dfrac{\theta'(t)}{t^2-16}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια)	x_i	ν_i	f_i %	N_i	F_i %	$\nu_i x_i$
[25,)			x			
[,)			$x+20$			
[,)			$2x$			
[,)			x^2-6x	50		
ΣΥΝΟΛΟ						

Γ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες f_i % $i=1,2,3,4$

Μονάδες 6

Γ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι $\delta=50$ χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι $c=10$.

Μονάδες 8

Γ3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ των ηλικιών.

Μονάδες 6

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Εξακόσιοι απόφοιτοι Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, οι οποίοι έχουν τα ίδια τυπικά και ουσιαστικά προσόντα, υποβάλλουν αίτηση πρόσληψης σε δύο εταιρείες Α και Β. Δίνεται ότι η πιθανότητα, ένας τυχαία επιλεγμένος από αυτούς:

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε μια μόνο από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{\lambda+1}{3\lambda}$, $\lambda \neq 0$

- να κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη το πολύ σε μια από τις εταιρείες Α και Β είναι $\frac{3\lambda-1}{3\lambda}$, $\lambda \neq 0$
- να μην κριθεί κατάλληλος για πρόσληψη σε καμμία από τις δύο εταιρείες είναι $\frac{1}{\lambda-2}$, $\lambda \neq 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι λ=4.

Μονάδες 8

Δ2. Από τους 600 αποφοίτους που υπέβαλαν αίτηση πρόσληψης στις εταιρείες Α και Β, η εταιρεία Α έκρινε κατάλληλους για πρόσληψη 50 λιγότερους από όσους έκρινε η εταιρεία Β.

α) Πόσοι απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Α, πόσοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη μόνο από την εταιρεία Β και πόσοι απόφοιτοι θα βρεθούν στο δίλημμα να επιλέξουν σε ποια από τις δύο εταιρείες στις οποίες κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, επιθυμούν να εργαστούν;

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι 300 απόφοιτοι κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, από τις εταιρείες Α ή Β.

Μονάδες 6

Δ3. Στους αποφοίτους που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη δίνεται η δυνατότητα παρακολούθησης προγράμματος επιμόρφωσης. Αν η πιθανότητα εύρεσης εργασίας για αυτούς που θα παρακολουθήσουν το πρόγραμμα είναι διπλάσια από την αντίστοιχη εκείνων που δεν θα το παρακολουθήσουν, να υπολογίσετε πόσοι απόφοιτοι από αυτούς, που δεν κρίθηκαν κατάλληλοι για πρόσληψη, θα βρουν εργασία.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν_επιτρέπεται να_γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΡΙΤΗ **12** ΙΟΥΝΙΟΥ **2012**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ**:** ΠΕΝΤΕ (**5**)

ΘΕΜΑ Α

Α**1.** Έστω $f(x)=c$, $x \in$ Ρ και c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι $(c)'=0$

Μονάδες **7**

Α**2.** Αν $t_1, t_2, ..., t_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, τότε να ορίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων.

Μονάδες **4**

Α**3.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες **4**

Α**4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f_i είναι η σχετική συχνότητα της τιμής x_i μιας μεταβλητής Χ, τότε ισχύει: $0 \le f_i \le 1$

β) Αν x_i είναι η τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ, τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i

γ) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ ενός δειγματικού χώρου **Ω** είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, τότε ισχύει:

$$P(A \cup B \cup \Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$$

δ) $(\text{συν}x)' = \text{ημ}x, \; x \in \mathbb{R}$

ε) Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου **Ω**, τότε το ενδεχόμενο $A \cup B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ **Β**

Οι ημέρες αδείας των υπαλλήλων μιας εταιρείας ομαδοποιούνται σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους, σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός ημερών (αδείας)	x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
[6,…)		16			
[…,…)					
[…,…)					
[…,…)					
[…,26)					
Σύνολο					

Αν ισχύει ότι:

- στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων των ημερών αδείας το τόξο α_1 του κυκλικού τομέα, το οποίο αντιστοιχεί στην πρώτη κλάση, είναι 72^{o}, και
- $3f_2=3f_5=f_3=f_4$, τότε:

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε κατάλληλα.

Μονάδες **8**

Β2. Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας (όχι σε μιλιμετρέ) το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Μονάδες **4**

Β3. Να βρείτε τον μέσο αριθμό ημερών αδείας και την τυπική απόκλιση του δείγματος.

(Δίνεται: $25{,}6 \approx 5{,}06$)

Μονάδες **8**

Β4. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που πήραν άδεια από 12 μέχρι 25 ημέρες.

Μονάδες **5**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B=\{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ δύο ενδεχόμενα του Ω, με $P(A)=\frac{1}{2}$. Αν είναι $P(\omega_1)=\alpha$, $P(\omega_2)=\beta$, με $26\alpha^2-10\alpha-2\alpha\beta+\beta^2+1=0$, $P(\omega_3)=\gamma$ και η συνάρτηση

$g(x)= P(\omega_4)\, x^3$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\frac{1}{5}$ και $\gamma=\frac{1}{10}$

Μονάδες **9**

Γ2. Να βρείτε το $P(\omega_4)$, αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο $(1, g(1))$, είναι παράλληλη προς την ευθεία y=x, και στη συνέχεια να βρείτε το $P(\omega_5)$

Μονάδες **6**

Γ3. Αν είναι $P(\omega_4)=\frac{1}{3}$, $P(\omega_5)=\frac{1}{6}$, τότε να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Κ, Λ, όπου:

Κ: «ένα μόνο από τα Α και Β να πραγματοποιείται»

Λ: «να πραγματοποιείται το Α ή να μην πραγματοποιείται το Β».

Μονάδες **10**

ΘΕΜΑ Δ

Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 6 μέτρων κατασκευάζεται μια δεξαμενή σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ανοικτή από πάνω. Από τις γωνίες του φύλλου λαμαρίνας κόβονται τέσσερα ίσα τετράγωνα πλευράς x μέτρων, 0<x<3 και στη συνέχεια οι πλευρές της διπλώνονται προς τα επάνω, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Δ1. Να αποδείξετε ότι ο όγκος της δεξαμενής ως συνάρτηση του x είναι

$$f(x)=4x(3-x)^2,\ 0<x<3$$

(Δίνεται ότι ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι V=αβγ).

Μονάδες **4**

Δ2. Να βρείτε για ποια τιμή του x η δεξαμενή έχει μέγιστο όγκο.

Μονάδες **6**

Δ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+2)-8}{x}$

Μονάδες **4**

Δ4. Θεωρούμε τις τιμές $y_i=f(x_i)$, i=1,2,3,4,5 με $1=x_1<x_2<x_3<x_4<x_5=2$, οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{y}=12$, τυπική απόκλιση $s_y=2$ και συντελεστή μεταβολής CV_y.
Να βρείτε το εύρος R των τιμών y_i, i=1,2,3,4,5. Στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ με $-12<\alpha<0$ ο οποίος, αν προστεθεί σε καθεμιά από τις τιμές y_i, προκύπτει δείγμα με συντελεστή μεταβολής CV τέτοιον, ώστε

$$CV=2CV_y+\frac{R}{12}$$

Μονάδες **6**

Δ5. Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου **Ω** με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν είναι $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ και $A \subseteq B$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{P(A)}{P(B)} \leq \left(\frac{3 - P(B)}{3 - P(A)} \right)^2$$

Μονάδες **5**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 7

Α2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς εύρος ή κύμανση.

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to x_o}(\text{συν}x) = \text{συν}x_o$

(μονάδες 2)

β) $(c\, f(x))' = c\, f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το διάγραμμα συχνοτήτων.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου **Ω** λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \varnothing$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x-3),\ x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = x_1 \text{ και } P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\,e}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα

Μονάδες 5

και

Β4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \le P(A' - B') \le \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[α, ·)				λ
[· , ·)				3λ + 10
[· , ·)				
[· , ·)				$κλ^2 - 2λ + 10$
[· , ·)				$κλ^2 - 3λ + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3κ = 0,\ \text{όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } κ \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$ και $f_5\% = 10$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 10$ και $c = 4$

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1,\ x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \dfrac{1}{3}$, όπου $i = 1, 2$

και

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$$A = \{\omega \in \Omega \mid f'(\omega) \le 0\},\qquad B = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > 1\}$$

και

$$\Gamma = \left\{\omega \in \Omega \mid x^2 + \omega x \ge -\frac{1}{4} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\right\}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1), P(\omega_2), P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες Ρ(Α), Ρ(Β), Ρ(Γ) και Ρ(Α-Β)

(μονάδες 8)
Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o

Μονάδες 4

Δ3. Αν $M_\kappa(\omega_\kappa, y_\kappa)$, $\kappa = 1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y = x + 1$ με

$$2\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa} \quad \text{και} \quad R_{y_\kappa} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τα ω_3 και ω_4 του δειγματικού χώρου Ω, όπου

δ_{ω_κ}: η διάμεσος των τετμημένων των σημείων M_κ,

δ_{y_κ}: η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων M_κ και

R_{y_κ}: το εύρος των τεταγμένων των σημείων M_κ

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο_εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο_πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή_των_απαντήσεών_σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην_γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν_σημειώσεις_σας_πάνω_στα_θέματα_δεν θα_βαθμολογηθούν_σε_καμία_περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(x - 2s,\ x + 2s)$, όπου x η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)

β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα.

(μονάδες 2)

γ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$ (μονάδες 2)

δ) Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B

(μονάδες 2)

ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο διασποράς. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα [10, 20) και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
[10, ·)					
[· , ·)					
[· , ·)					
[· , ·)					
[· , 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 12

Β2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία $\bar{x}$ των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών τους.

Μονάδες 8

Β3. Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο; (Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega = \{-1,0,1,2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση

$$P(\kappa) = \frac{\alpha}{\kappa^2 + 1}, \quad \kappa \in \Omega, \quad \text{με } \alpha > 0$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω με

$$A = \{\kappa \in \Omega \mid \kappa^2 \ge 1\}$$

$$B = \{\kappa \in \Omega \mid (\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0\}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{5}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{11}$, $P(B) = \frac{6}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: «να πραγματοποιείται το B και όχι το A»

Δ: «να μην πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B».

Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \kappa \in \Omega$$

και το ενδεχόμενο

$$E = \{\kappa \in \Omega \mid \text{η συνάρτηση } f \text{ να είναι γνησίως αύξουσα}\}.$$

Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο E είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 100 m. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του ΑΒ τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος ΑΓ να είναι x m.

Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΖ και ΓΒΘΗ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του x, είναι

$$E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, \quad x \in (0,\ 100)$$

(μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για $x = 50$, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ σε ν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα o_i, $i = 1, 2, ..., \nu$ με αντίστοιχα μήκη x_i, $i = 1, 2, ..., \nu$.

Αν η μέση τιμή των μηκών x_i, $i = 1, 2, ..., \nu$ είναι $x = 2$ και η τυπική τους απόκλιση είναι $s = 0{,}2$ τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι $\nu = 25$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα o_i με αντίστοιχα μήκη x_i, όπου $i = 1, 2, ..., 25$

Δίνεται ότι: $$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$$

Μονάδες 6

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα o_i, $i = 1, 2, ..., 25$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$\Lambda = \{ \text{o}_i,\ i = 1, 2, ..., 25 \}$ τέτοιο, ώστε ο δείκτης i να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή πολλαπλάσιο του 4 .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B, να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X, αν $\bar{x} > 0$, και πώς, αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν κοινό πεδίο ορισμού A, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πάντοτε πεδίο ορισμού το A.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει ότι $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

γ) Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X, ισχύει ότι $0 \le f_i \le 1$.

δ) Η τυπική απόκλιση s των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.

ε) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται μόνο όταν τα A, B πραγματοποιούνται συγχρόνως.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2-4,\ x\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-2,0)$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=3$.

Μονάδες 6

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to -2}\frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν συνδρομητών μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας. Για τον μήνα Μάιο, οι χρόνοι ομιλίας (σε ώρες) που έχουν χρεωθεί οι συνδρομητές του δείγματος έχουν χωριστεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.

Δίνεται ότι:

- Η μικρότερη διάρκεια χρόνου ομιλίας που παρατηρήθηκε στο δείγμα είναι μηδέν.
- Το κέντρο της πέμπτης κλάσης είναι 18.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην πέμπτη κλάση ισούται με 36^{o}.
- $\dfrac{N_1}{4}=\dfrac{N_2}{9}=\dfrac{N_3}{15}=\dfrac{N_4}{18}$, όπου N_1, N_2, N_3 και N_4 είναι οι αθροιστικές συχνότητες της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος $\mathbf{c}$ της κάθε κλάσης είναι 4.

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα **Ι** συμπληρωμένο, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Σχετικές συχνότητες $f_i\%$**
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
[,)		
	Σύνολο	

Πίνακας **Ι**

Μονάδες 10

Για τα ερωτήματα Γ3 και Γ4, δίνεται ότι $f_1\%=20$, $f_2\%=25$, $f_3\%=30$, $f_4\%=15$ και $f_5\%=10$.

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών του δείγματος οι οποίοι έχουν χρεωθεί τουλάχιστον 3 ώρες και λιγότερες από 10 ώρες ομιλίας.

Μονάδες 5

Γ4. Υποθέτουμε ότι οι συνδρομητές της εταιρείας δικαιούνται κάθε μήνα μέχρι 4 ώρες δωρεάν χρόνο ομιλίας. Έτσι, πληρώνουν μόνο για το χρόνο ομιλίας που τους έχει χρεωθεί επιπλέον των 4 ωρών. Αφαιρούμε από το δείγμα τους συνδρομητές που χρεώθηκαν λιγότερες από 4 ώρες. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του χρόνου (σε ώρες) που πλήρωσαν οι υπόλοιποι συνδρομητές του δείγματος τον μήνα Μάιο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ = x, όπως φαίνεται στο Σχήμα **Ι**.

Α x Κ Β

x

Λ

Ν

x

Δ Μ x Γ

Σχήμα **Ι**

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, ως συνάρτηση του x, είναι:

$$E(x) = 2(x^2 - 4x + 8), \quad x \in (0,\ 4)$$

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν E(x) γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 4

Δ3. Θεωρούμε τις τιμές $y_i = E(x_i)$, $x_i \in (0, 4)$, $i = 1, 2, 3, ..., 19$, έτσι ώστε:

- Τα x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 19$ είναι διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους.
- Η μέση τιμή των x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 19$ και η διάμεσός τους είναι ίσες με 2.
- Η μέση τιμή των y_i, $i = 1, 2, 3, ..., 19$ είναι ίση με 8,02.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2, $i = 1, 2, 3, ..., 19$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση s_x των x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 19$ και να εξετάσετε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$, όπου t_i, $i = 1, 2, ..., \nu$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.

(Μονάδες 5)

γ) Επιλέγουμε τυχαία μία από τις τιμές x_i, $i = 1, 2, 3, ..., 19$. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων :

$A = \{ x_i, i = 1, 2, 3, ..., 19,$ έτσι ώστε $x_i^2 \geq 4 \}$,

$B = \{ x_i, i = 1, 2, 3, ..., 19,$ έτσι ώστε $E(x_i) \leq 8 \}$ και

Γ: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

(Μονάδες 6)

Μονάδες 17

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \backslash$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να ορίσετε το εύρος R (κύμανση) ενός συνόλου παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ο συντελεστής μεταβολής CV είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

β) Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με $A \subseteq B$, τότε για τις πιθανότητές τους ισχύει $P(A) > P(B)$.

γ) Η διάμεσος ενός δείγματος επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.

δ) Η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.

ε) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή, περίπου το 95% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή και s είναι η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$.

Β1. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1,2), να βρείτε το α.

Μονάδες 4

Β2. Για $\alpha = 3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

Β3. Για $\alpha = 3$ να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Για $\alpha = 3$ να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x - 1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα κουτί υπάρχουν σφαίρες, άλλες κόκκινου και άλλες μπλε χρώματος. Κάθε σφαίρα φέρει έναν θετικό ακέραιο αριθμό. Το πλήθος των σφαιρών με άρτιο αριθμό είναι λ και το πλήθος των σφαιρών με περιττό αριθμό είναι λ+1.
Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει άρτιο αριθμό»
Π: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει περιττό αριθμό»
K : «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει κόκκινο χρώμα»
M: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει μπλε χρώμα».

Δίνεται ότι:

- Η πιθανότητα του ενδεχομένου Π είναι $P(\Pi) = \dfrac{26}{51}$.
- Η πιθανότητα του ενδεχομένου $M \cap A$ είναι $P(M \cap A) = \dfrac{6}{51}$.

Γ1. α. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν συνολικά 51 σφαίρες (μονάδες 7).
β. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν 6 μπλε σφαίρες με άρτιο αριθμό (μονάδες 3).

Μονάδες 10

Γ2. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $P(K) = \dfrac{7}{10}P(M)$, τότε

α. να αποδείξετε ότι στο κουτί περιέχονται 30 μπλε και 21 κόκκινες σφαίρες (μονάδες 6)

β. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι μπλε με περιττό αριθμό (μονάδες 5)

γ. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι κόκκινη με περιττό αριθμό (μονάδες 4).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Δ

Ρωτήσαμε τις οικογένειες μιας πολυκατοικίας να μας πουν πόσα παιδιά έχει η καθεμιά. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών x_i	Οικογένειες ν_i
0	1
1	3
2	1
3	2
4	ν_5
x_6	1
ΣΥΝΟΛΟ	ν

Δ1. Αν η διάμεσος του αριθμού των παιδιών είναι $\delta = 3$, να βρείτε τις δυνατές τιμές του μεγέθους ν του δείγματος.

Μονάδες 9

Δ2. Αν $\nu = 12$ και η μέση τιμή του αριθμού των παιδιών είναι $\bar{x} = \frac{8}{3}$, τότε

α. να βρείτε την τιμή x_6 (μονάδες 5)

β. να κατασκευάσετε το διάγραμμα συχνοτήτων (μονάδες 2) και το πολύγωνο συχνοτήτων (μονάδα 1).

Τα διαγράμματα να γίνουν με στυλό.

Μονάδες 8

Δ3. Μετά από ένα χρόνο ξαναρωτήσαμε τις ίδιες οικογένειες για το πλήθος των παιδιών της καθεμιάς. Η οικογένεια που δεν είχε παιδιά απέκτησε δίδυμα και μία από τις οικογένειες που είχε ένα παιδί απέκτησε και δεύτερο. Στις υπόλοιπες οικογένειες ο αριθμός των παιδιών δεν μεταβλήθηκε. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των παιδιών που προκύπτει από τις νέες παρατηρήσεις.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ_(για_τους_εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς.

γ) Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής λέγεται ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβολής (CV) δεν ξεπερνά το 10%.

ε) Δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα όταν $A \cap B = \varnothing$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 50% συμμετέχει στην ομάδα του ποδοσφαίρου, το 55% δεν συμμετέχει στην ομάδα μπάσκετ και το 25% συμμετέχει και στις δύο παραπάνω ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα:

Β1. Ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα του μπάσκετ.

Μονάδες 6

Β2. Ο μαθητής να μην συμμετέχει σε καμία από τις δύο ομάδες.

Μονάδες 9

Β3. Ο μαθητής να συμμετέχει σε μόνο μία από τις δύο ομάδες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2f(x)-1}{x-1}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(2, f(2))$.

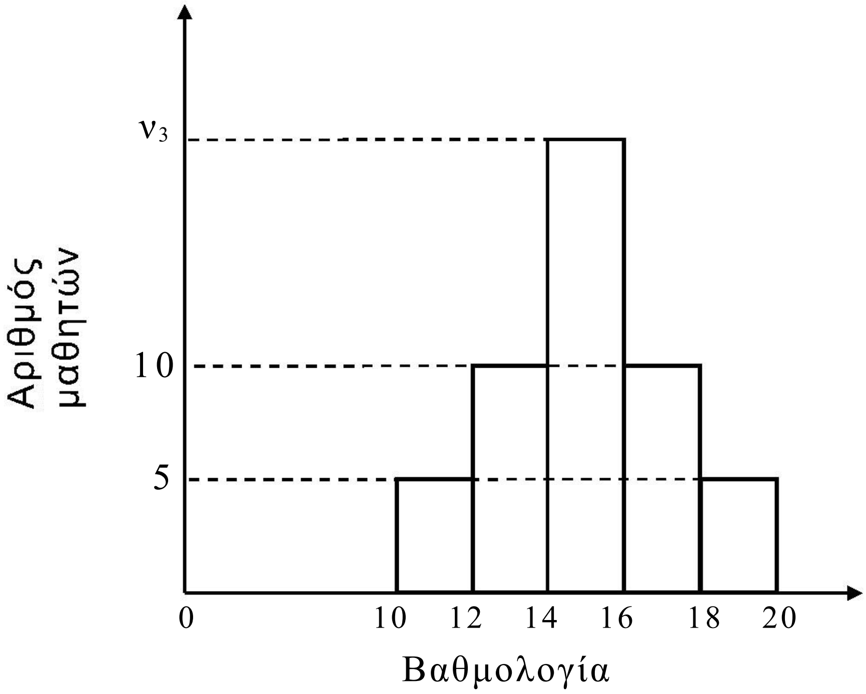
Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στα οποία ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ισούται με 1.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων για τους βαθμούς των μαθητών ενός σχολείου Α σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών.



Δίνεται ότι η σχετική συχνότητα επί τοις εκατό της πρώτης κλάσης $(f_1\%)$ ισούται με 10.

(Θεωρήστε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στην κλάση).

Δ1. Να αποδείξετε ότι το πλήθος των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα είναι $\nu = 50$ και ότι η συχνότητα της τρίτης κλάσης είναι $\nu_3 = 20$.

Μονάδες 4

Δ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή x_A και τη διακύμανση s_A^2 των βαθμών των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα.

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα και ο βαθμός τους ήταν τουλάχιστον 12.

Μονάδες 7

Δ4. Οι βαθμοί των μαθητών στο διαγώνισμα των Μαθηματικών ενός σχολείου Β ομαδοποιήθηκαν στις ίδιες ακριβώς κλάσεις, όπως και αυτές του σχολείου Α. Η συχνότητα κάθε κλάσης του σχολείου Β βρέθηκε τριπλάσια από τη συχνότητα της αντίστοιχης κλάσης του σχολείου Α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή x_B και τη διακύμανση s_B^2 των βαθμών των μαθητών που συμμετείχαν στο διαγώνισμα Μαθηματικών του σχολείου Β.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΝΕΟ_ΣΥΣΤΗΜΑ__Γ΄_ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σ’ ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, όπου $c \in \mathbb{R}$, $x \in A$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

(Μον. 2)

β) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ βρίσκεται το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων, όπου x η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

(Μον. 2)

γ) Αν f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης $f(g(x))$ ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

(Μον. 2)

δ) Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

(Μον. 2)

ε) $(x^{\nu})' = (\nu - 1)\cdot x^{\nu}$, όπου ν φυσικός αριθμός. (Μον. 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Επτά διαδοχικοί περιττοί αριθμοί έχουν διάμεσο 13.

Β1. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί είναι οι:

$$7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.$$

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s των παραπάνω αριθμών.

Μονάδες 7

Β4. Αν προσθέσουμε σε καθέναν από τους παραπάνω αριθμούς τον αριθμό 3, να βρεθεί ο συντελεστής μεταβολής CV των νέων αριθμών που θα προκύψουν.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - \frac{4}{3}$$

Γ1. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x) + f''(x) + 4}{\sqrt{x} - 1}$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x + 16$.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^4 + \alpha x + \beta \,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να υπολογίσετε τις τιμές των α (μον. 6) και β (μον. 2) αν

$$f(0) = 2019 \quad \text{και} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 0$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha = 4$ και $\beta = 2019$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το ακρότατό της.

Μονάδες 12

Δ3. Να αποδείξετε ότι $x^4 + 4x \geq -3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να__μην__αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν_επιτρέπεται να_γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό_σας σε όλα τα θέματα, μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $CV=\frac{x}{s}$, όπου x η μέση τιμή, s η τυπική απόκλιση και CV ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

β) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$

(Μον. 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

(Μον. 2)

δ) $(cf)'(x) = c\,f'(x)$, όπου c σταθερά και f παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(Μον. 2)

ε) $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$, όπου f συνεχής συνάρτηση

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες σωστά συμπληρωμένες.

α) Η παράγουσα της $f(x) = \eta\mu x$ είναι η $F(x) = ...$

(Μον. 3)

β) Αν $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ τότε $f'(x) = ...$

(Μον. 3)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = ...$, όπου c σταθερά

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε οκτώ μαθήματα είναι οι παρακάτω:

11, 16+α, 14, 10, 15, 2α+10, 17, 18

Β1. Να υπολογίσετε το α αν η μέση τιμή των βαθμολογιών του μαθητή είναι 15.

Μονάδες 7

Β2. Για α=3 να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

Β3. Για α=3 να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση (s).

Μονάδες 8

Β4. Για α=3 να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής (CV).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9}, & x>3\\[2mm] \dfrac{\alpha}{3}, & x=3\\[2mm] \beta+e^{x-3}, & x<3\end{cases}$$

Γ1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.

Μονάδες 10

Γ2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=(x^2+3)(x-3)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(x)=3(x-1)^2$

Μονάδες 7

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $g(x)=3x^2-6x+3$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να_μην_αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται___να__γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο_τετράδιό__σας σε όλα τα θέματα, μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Σχηματίζουμε τις διαφορές $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \ldots, t_\nu - \bar{x}$. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με μηδέν.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και είναι ίσο με $A \in \mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^\nu = A^\nu,$$ όπου ν φυσικός αριθμός.

β) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 95% περίπου των παρατηρήσεων, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

δ) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

ε) Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$, όπου ν_i η συχνότητα της τιμής x_i και ν το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι μέγιστες θερμοκρασίες σε 6 πόλεις μια ημέρα του χειμώνα είναι:

7, 8, 10, 5, 11, 7

Β1. Για τις παρατηρήσεις αυτές, να υπολογίσετε:
α. τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον. 3)
β. τη διάμεσο δ (μον. 3)
γ. τη διακύμανση s^2 (μον. 5)

Μονάδες 11

Β2. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων δεν είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τον μικρότερο θετικό αριθμό τον οποίο πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμιά από τις παραπάνω παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα που θα προκύψει να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-\kappa x+2,\ \kappa\in\mathbb{R}.$$

Γ1. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa\in\mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1.

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa=3$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-1}$.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa=3$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2,f(2))$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+4}+\frac{3}{4}$$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

Μονάδες 3

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}$.

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ4. Αν οι τιμές $f(-1)$, $f(1)$, $f(0,25)$, $f(-0,5)$, $f(0)$ είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X, τότε να τις διατάξετε κατά αύξουσα σειρά (μον. 5) και να υπολογίσετε το εύρος τους (R) (μον. 2) και τη διάμεσό τους (δ) (μον. 2).

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται__να_γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Γ΄_ΤΑΞΗΣ_ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ__& Δ΄_ΤΑΞΗΣ_ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2018

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν η f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα σύνολο Α, να αποδείξετε ότι:

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x),\ x\in A, \text{ όπου } c\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 10

Α2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων όταν ο ν είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X, τότε η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i.

β. Η ταχύτητα $\upsilon(t)$ ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι, τη χρονική στιγμή t_0, $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$.

γ. Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

δ. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A, τότε:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)$$

ε. Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Ο χρόνος σε λεπτά που χρειάστηκαν 20 υποψήφιοι για να απαντήσουν σε μία ερώτηση φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος σε λεπτά	Αριθμός υποψηφίων ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[0,2)	1	
[2,4)	7	
[4,6)	4	
[6,8)		
[8,10)	1	
ΣΥΝΟΛΑ	20	100

Β1. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά, αφού υπολογίσετε τις αντίστοιχες τιμές.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τη μέση τιμή x του χρόνου που χρειάστηκαν οι υποψήφιοι για να απαντήσουν στην ερώτηση.

Μονάδες 5

Β3. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον τέσσερα λεπτά για να απαντήσουν στην ερώτηση;

Μονάδες 5

Β4. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$).

Μονάδες 6

Β5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$) και τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$$

Έστω ότι

$$f'(1)+3\ ,\ \ 8\ ,\ \ f(1)\ ,\ \ 7\ ,\ \ f(2)\ ,\ 10$$

είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ενός δείγματος.

Γ1. Να βρείτε τις τιμές των παρατηρήσεων (μον. 3), τη μέση τιμή (μον. 4) και τη διάμεσο (μον. 3).

Μονάδες 10

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των παραπάνω παρατηρήσεων είναι $s = 2$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(\frac{R}{3}, f(\frac{R}{3})\right)$, όπου R το εύρος των παραπάνω παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

Γ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρήστε ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x) = x^2 + \frac{4s^2}{x} + \bar{x} - 27, \quad \text{με } x \neq 0,$$

όπου x και s είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των παρατηρήσεων $x_1, x_2, ..., x_\nu$ μιας μεταβλητής X ενός δείγματος. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και το σημείο $K(1,0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Δ1. Να δείξετε ότι $s = 2$ και $x = 10$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 f'(x)}{\sqrt{4x+1} - 3}$

Μονάδες 6

Δ4. Έστω ότι $y_1, y_2, ..., y_\nu$ είναι οι τιμές που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις $x_1, x_2, ..., x_\nu$ αντίστοιχα, όταν η κάθε μία από αυτές αυξηθεί κατά 10%. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής των τιμών $y_1, y_2, ..., y_\nu$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17.00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2019

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x)=c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με 0, δηλαδή $f'(x)=(c)'=0$.

Μονάδες 7

Α2. Αν $x_1, x_2, ..., x_\nu$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν και $w_1, w_2, ..., w_\nu$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να γράψετε τον τύπο με τον οποίο υπολογίζεται ο σταθμικός μέσος x της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού Α, μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστό της.

β. Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων ομαδοποιημένων δεδομένων, το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος ν.

γ. Αν οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για όλες τις τιμές του x, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$$

δ. Ο συντελεστής μεταβολής CV ενός δείγματος είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης των τιμών του δείγματος.

ε. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι τιμές 10 διαφορετικών προϊόντων ενός καταστήματος:

13, 12, $\lambda + 5$, 9, 14, 15, κ, 12, 17, 13

όπου: $\lambda = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

Β1. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$.

Μονάδες 6

Β2. Για $\lambda = 2$ να υπολογίσετε την τιμή του κ, αν η μέση τιμή $(\bar{x})$ των προϊόντων είναι 12.

Μονάδες 6

Β3. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση (s) των τιμών των προϊόντων είναι 3.

Μονάδες 7

Β4. Για $\lambda = 2$ και $\kappa = 8$ να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών των προϊόντων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-2x^2-\alpha x+2,$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^{o}.

Μονάδες 6

Γ2. Για $\alpha=-1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha=-1$ να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι:

$$f(2019)+f(2020)>2\cdot f(1)$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=(\lambda-3)x^2-\lambda x+\lambda^2-6\lambda,$$

όπου για τη σταθερά λ ισχύει $0<\lambda<3$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι $y=-\lambda x+\lambda^2-6\lambda$

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0,f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο εμβαδού $E(\lambda)=\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot(\lambda-6)^2$

Μονάδες 7

Δ3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το εμβαδόν του παραπάνω τριγώνου να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Για $\lambda = 2$ δίνονται τα σημεία $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$, $A_4(x_4, y_4)$, $A_5(x_5, y_5)$ της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$. Αν οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 αντίστοιχα, έχουν τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να βρείτε την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμια άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλου μελανιού.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17:00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω $x_1, x_2, ..., x_\kappa$ οι τιμές μίας μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου κ, ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $\kappa \leq \nu$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1,2,...,\kappa$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + ... + f_\kappa = 1$$

Μονάδες 5

Α2. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, και Β το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η (πρώτη) παράγωγος της f;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση υ της ταχύτητας ενός κινητού είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση a του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι η παράγωγος της ταχύτητας.

β. Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε ορίζεται και η συνάρτηση $R = \frac{f}{g}$ με $R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

γ. Αν x_1, x_2 είναι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X, με αντίστοιχες συχνότητες ν_1, ν_2, τότε για τις αθροιστικές συχνότητες N_1, N_2 ισχύει $\nu_2 = N_2 + N_1$, όπου $N_1 = \nu_1$.

Μονάδες 6

Α4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(\eta\mu x)' = ...$

β. $\left(x^{\rho}\right)' = ...$, όπου ρ ρητός αριθμός.

γ. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = ...$, όπου $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται ο χρόνος σε ώρες που αφιερώνουν 20 μαθητές σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας.

x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i
0	1		
1	κ^2		
2	8		
3	$\kappa - 1$		
Σύνολο	20	100	

Β1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 7

Β2. Για $\kappa = 3$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με αριθμητικές τιμές.

Μονάδες 10

Β3. Πόσοι από τους παραπάνω μαθητές αφιερώνουν χρόνο σε αθλητικές δραστηριότητες κατά τη διάρκεια μίας ημέρας;

Μονάδες 3

Β4. Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που αφιερώνουν τουλάχιστον 2 ώρες σε αθλητικές δραστηριότητες;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\ x\neq -1.$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία για $x<-1$.

Μονάδες 7

Γ2. Αν $x\in[-4,-2]$, να αποδείξετε ότι $-3\leq f(x)\leq -\dfrac{5}{3}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

Μονάδες 6

Γ4. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-a^2-8a,\quad a\in\mathbb{R}$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f ως συνάρτηση του a.

Μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε για ποια τιμή του a το τοπικό ελάχιστο της f παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Μονάδες 8

Δ4. Για $a = -4$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - 16}{f'(x)}.$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιό σας να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2,\ x<0$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\dfrac{x-1}{x},\ x<0$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v_1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα v_2 = 4km/h.

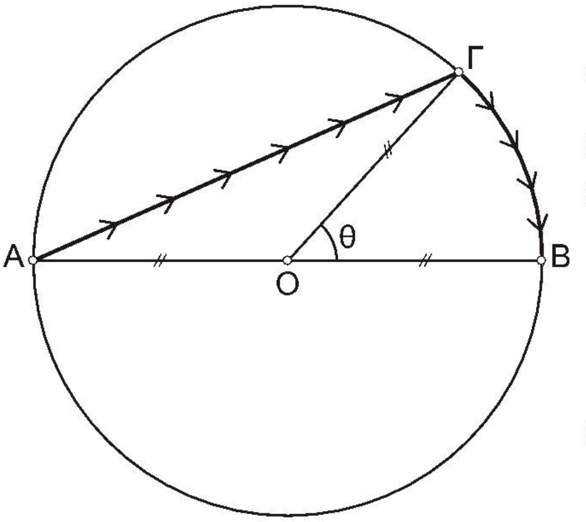
Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β.

Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma=\theta$, $\theta\in(0,\pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β $(\theta=0)$.

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β $(\theta=\pi)$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι $t(\theta)=\frac{1}{4}\theta+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$, $\theta\in[0,\pi]$.

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S=R\cdot\theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x$ και συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=-x^2+\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)}+x\right)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η ευθεία $\varepsilon: y=x+1$ (μονάδες 3). Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{R} - \{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A\cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0)=0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$, $x<0$.

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=g\circ f^{-1}$ είναι η $h(x)=\frac{x-1}{x}$, $x<0$.

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot ημ\frac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

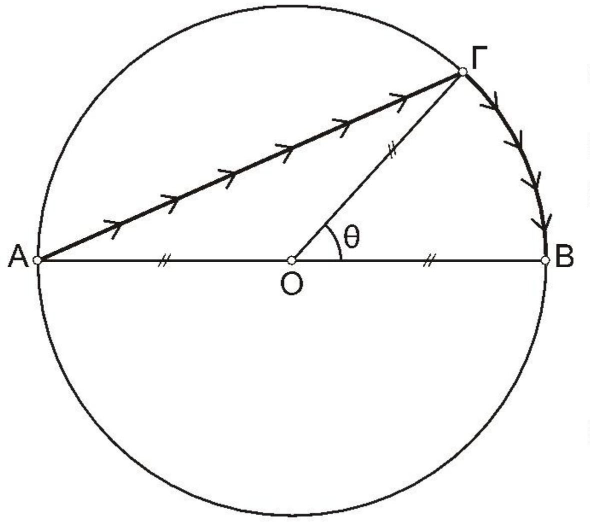
Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα $v_1 = 2km/h$ και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα $v_2 = 4km/h$.

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β. Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $\widehat{ΒΟΓ}=θ$, $θ\in(0,π)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β $(θ=0)$.

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β $(θ=π)$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι $t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$, $\theta \in [0,\pi]$.

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ (σε ακτίνια) είναι $S = R \cdot \theta$.

Μονάδες 8

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 9

Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: ℝ \to ℝ$ με τύπο $f(x) = e^x$ και συνάρτηση $g: ℝ \to ℝ$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x$, $\alpha \in ℝ$, για την οποία το όριο $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{-g(x)} + \alpha x\right)$ υπάρχει στο $ℝ$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ (μονάδες 3).

Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) > g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{f(x-1)-x}{x-k}+\frac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0,\quad k \in \mathbb{R}-\{1\}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

δ) Ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ και

$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln x$.

Β1. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2).

Μονάδες 8

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

Μονάδες 6

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$. Αν

$$\phi(x) = \ln x - \ln(x-1)\ ,\quad x \in (1, +\infty),$$

να εξετάσετε αν $\phi = h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - x}{\eta\mu x} = 0$.
- $f'(x) f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \le x \le 0 \\ x^x, & 0 < x \le \frac{2}{e} \end{cases}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x\, f(x)\, dx > \frac{2}{e}\left(^{\frac{2}{e}}\right) - \frac{1}{e}\left(^{\frac{1}{e}}\right)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να
2. γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$, τότε οι $g\circ f$ και $f\circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x-1}{x}=1$.

γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g\,,h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους

$$g(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1} \qquad \text{και} \qquad h(x)=\ln x\ .$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}=f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Μονάδες 6

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\sigma\upsilon\nu\,x$ έχει λύση στο $(1,\ +\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,\ 2]\to\ \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $f(2)=2$
- $f'(2)=1$
- $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ε_1): $y=-x+2$ (μονάδες 3) και

ii. εφάπτεται στην ευθεία (ε_2): $y=x$ (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x \in (1, 2)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \geq 2x - 2$, για κάθε $x \in [1, 2]$. (μονάδες 2)

ii. $1 < \int_1^2 f(x)dx < \frac{3}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} e^x & , \ x \geq 0 \\ -e^{-x} + 2 & , \ x < 0 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$, έχει εξίσωση $y = e \cdot x$.

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής Α, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

Μονάδες 6

Δ4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ