

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ**

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται ο πίνακας συχνοτήτων

x_i	Συχνότητα (v_i)	$v_i x_i$	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Σχετική Συχνότητα % ($f_i \%$)
1	12			
2	15			
3	8			
4	5			
5	10			
Αθροί- σματα				

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 19

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

α. Να υπολογίσετε τον πίνακα A^2

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τον πίνακα $B = xA + yI$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

γ. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί x, y ώστε $A^2=B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + \sqrt{2}$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}, & x > 3 \\ \lambda^2 x^2 + 3\lambda x + 1, & x \leq 3 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε:

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

Μονάδες 8

β. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

Μονάδες 5

- γ. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

Μονάδες 12

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
Τ.Ε.Λ.

ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΑΠΟΦΟΙΤΟΥΣ
ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΟΜΕΩΝ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

A. α) Δίνεται ο πίνακας $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

Να υπολογίσετε τον πίνακα $N = M^2 - 4M + I_2$

β) Δίνεται ότι ο πίνακας A έχει διάσταση 3×2 , ο πίνακας B 1×4 , ο πίνακας Γ 4×3 , ο πίνακας Δ 2×1 και ο πίνακας E 2×4 . Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω πράξεις $B \cdot \Gamma$, $B \cdot \Delta$, $\Delta \cdot B + 3E$, A^2 και $A + B$ ορίζουν πίνακες και να βρείτε τις διαστάσεις των πινάκων αυτών.

B. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης -2

β) Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{e^x - e}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 2004 \right)$$

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

- A. α)** Η γενέτειρα λ ενός κώνου είναι 17 cm και το ύψος του 15 cm. Να βρείτε την ακτίνα της βάσης του και τον όγκο του.
- β)** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, & x \neq -3 \\ \alpha, & x = -3 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = -3$

- B.** Να μεταφερθεί στο τετράδιό σας και να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Συνάρτηση f	Πρώτη παράγωγος f'
$\ln x, \quad x > 0$	
$\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	
$\eta \mu x$	
$\sigma \upsilon \nu x$	
$\sqrt{x}, \quad x > 0$	

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

- A.** Η χωρητικότητα σε λίτρα των πνευμόνων ενός ανθρώπου ηλικίας x ετών δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{200}x^2 + \frac{1}{5}x + 4$, $10 \leq x \leq 35$.

Σε ποια ηλικία οι πνεύμονες του ανθρώπου έχουν τη μέγιστη χωρητικότητα;

B. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = 1-x^2$ και $g(x) = x - 1$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τον τύπο και την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f + g, \quad \frac{g}{f}$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

A. α) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0$ παριστάνει κύκλο και να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα αυτού του κύκλου.

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής του παραπάνω κύκλου με τον άξονα $y' y$.

B. Δέκα κοινότητες ενώθηκαν σε ένα Δήμο σύμφωνα με το σχέδιο "ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΣ". Ο πληθυσμός του Δήμου αυτού t χρόνια μετά την ένωση δίνεται από τη συνάρτηση με τύπο

$$P(t) = 10t e^{\frac{t}{10}} - 100e^{\frac{t}{10}} + 10100, \quad 0 \leq t \leq 22$$

α) Να αποδείξετε ότι $P'(t) = t e^{\frac{t}{10}}$

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού 10 χρόνια μετά την ένωση (στο τελικό αποτέλεσμα να λάβετε $e = 2,7$).

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο, εκτός από τη μεταφορά του πίνακα του θέματος 2B.
2. Στην πρώτη σελίδα των φωτοαντιγράφων να γράψετε το **ονοματεπώνυμό** σας στο πάνω μέρος αμέσως μόλις σας - παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία καταστρέφονται μετά την παράδοσή τους.
3. Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
4. Να χρησιμοποιηθεί τόσο στις απαντήσεις των θεμάτων όσο και στα σχήματα **ΜΟΝΟ** στυλό διαρκείας χρώματος μπλε ή μαύρου.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού (Blanco) και υπολογιστή τσέπης.
6. Επιτρέπεται η χρήση οργάνων σχεδίασης.
7. **Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.**
8. **Διάρκεια εξέτασης υποψηφίων τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων. Δυνατή αποχώρηση μία (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί των 11 μαθητών μιας τάξης ενός Τ.Ε.Ε. σε ένα μάθημα είναι:

12, 12, 9, 15, 12, 16, 17, 7, 19, 18, 17.

Για τα δεδομένα αυτά:

α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 5

ε. Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \ln 2 .$$

α. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις τιμές $f'(0)$ και $f'(1)$.

Μονάδες 5

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 12

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 - 1, & x \geq 1 \\ x + 2, & x < 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το λ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(x) = \lambda x^3 - x$ όπου λ πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

α. Να βρείτε την τιμή του λ .

Μονάδες 10

β. Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$.

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

α. Να υπολογίσετε τον πίνακα $-2A + 3B$

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε τον πίνακα X έτσι ώστε να ισχύει:
 $3A - X = 2B$

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε τον πίνακα $A^2 + 2AB$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = 2x^3 + 5$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = x^2 + 1$$

α. Να βρείτε την $f'(x)$ και την $g'(x)$

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την $[f(x) \cdot g(x)]'$

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε την $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -4(x^2 + 1) + 16x - 9$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Ρωτήσαμε 50 εργαζόμενους μιας εταιρείας ως προς τις μηνιαίες αποδοχές τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στις δύο πρώτες στήλες του παρακάτω πίνακα:

Αποδοχές σε Ευρώ (x_i)	Αριθμός εργαζομένων (v_i)	Αθροιστική συχνότητα	Σχετική Συχνότητα (f_i)	Σχετική αθροιστική συχνότητα	$v_i x_i$
800	6				
900	17				
1000	12				
1100	8				
1200	7				
Αθροίσματα	50				

α. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τις κενές στήλες.

Μονάδες 15

β. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.**
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ Τ.Ε.Ε.
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 2^{ΟΥ} ΚΥΚΛΟΥ Τ.Ε.Ε.
ΤΕΤΑΡΤΗ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003**

ΘΕΜΑ 1^ο

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές :

5, 3, 3ω, 3, 2ω, 3, 3ω, ω με $\omega > 0$

α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 4$, να αποδείξετε ότι $\omega = 2$

Μονάδες 7

β) Για $\omega = 2$ να βρείτε :

i) το εύρος των τιμών.

Μονάδες 5

ii) την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 7

iii) την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 7 & , \text{αν } x \neq 1 \\ \lambda - 2 & , \text{αν } x = 1 \end{cases}$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$.

Μονάδες 14

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης $t(\text{sec})$ δίνεται από την συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t \quad \text{όπου } 0 \leq t \leq 10$$

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t = 0$;

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε την χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1^ο

Εξετάσαμε δείγμα 25 οικογενειών μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των παιδιών τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα (%) $f_i \%$
0	4		
1			
2	5		
3	4		
4	3		
5	2		
Αθροίσματα			

α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε. **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή. **Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε τη διάμεσο. **Μονάδες 5**

δ) Τι ποσοστό οικογενειών έχει τρία παιδιά; **Μονάδες 5**

ε) Πόσες οικογένειες έχουν μέχρι και δύο παιδιά; **Μονάδες 5**

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-18}{\sqrt{x}-3} & , \quad x > 9 \\ \lambda x + 3 & , \quad x \leq 9 \end{cases}$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x)$ **Μονάδες 12**

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x)$ **Μονάδες 5**

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=9$. **Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με
 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης f . **Μονάδες 5**

β) Αν $f(1)=0$ και $f(2)=5$, να βρείτε τα α και β . **Μονάδες 10**

γ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4^ο

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι x μέτρα:

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x.$$

Μονάδες 5

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 09 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1^ο

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

1) $f_1(x) = x \cdot \ln x, \quad x > 0$ **Μονάδες 5**

2) $f_2(x) = \frac{x+1}{e^x}$ **Μονάδες 5**

β) Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

1) $g_1(x) = \eta \mu x - \sigma \upsilon \nu x$ **Μονάδες 8**

2) $g_2(x) = 5x^3 - 7x^2 + x + 2004$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 2^ο

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 9x}{x - 3}, \quad x \neq 3$

Μονάδες 10

β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & , \quad x \leq 1 \\ \lambda x^2 - \lambda^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

1) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ **Μονάδες 4**

2) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ **Μονάδες 4**

3) Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3-12x$

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 13

β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση έχει ακρότατα.

Μονάδες 6

γ) Για κάθε θέση ακρότατου, να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^ο

Εξετάσαμε δείγμα 50 κατοίκων μιας πόλης, ως προς τον αριθμό των πιστωτικών τους καρτών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Αρ. πιστ. Καρτών x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα f_i	$x_i \cdot v_i$
0	8			
1	20			
2	11			
3	7			
4	4			
Αθροίσματα	50			

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
Μονάδες 10
- β) Να βρείτε τη μέση τιμή του δείγματος των 50 κατοίκων.
Μονάδες 5
- γ) Πόσοι κάτοικοι έχουν περισσότερες από δύο κάρτες;
Μονάδες 5
- δ) Να σχεδιάσετε το κατακόρυφο ραβδόγραμμα συχνοτήτων.
Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Ερωτήθηκαν 50 μαθητές ενός σχολείου για τον αριθμό των βιβλίων που διάβασαν στις διακοπές. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	$x_i v_i$
0		11	
1		25	
2		42	
3		47	
4		50	
Αθροίσματα			

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 8

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 8

- γ) Να βρείτε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

- δ) Να βρείτε το εύρος των τιμών.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & , \quad x < -1 \\ \kappa x + \mu & , \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 5 + \ln x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

όπου κ, μ πραγματικοί αριθμοί

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ **Μονάδες 4**

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ **Μονάδες 4**

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ **Μονάδες 4**

δ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ **Μονάδες 4**

ε) Να βρείτε τα κ και μ , ώστε να υπάρχουν ταυτόχρονα
τα $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ **Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η πρώτη παράγωγος έχει τύπο: $f'(x) = x^2 - 2x$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f'(2) = 0$.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
Μονάδες 6
- γ) Να βρείτε την $f''(x)$.
Μονάδες 6
- δ) Για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει ακρότατα και ποιο είναι το είδος των ακρότατων;
Μονάδες 4
- ε) Αν $f(0) = 2005$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$, $0 \leq t \leq 10$, όπου t ο χρόνος σε έτη.

- α) Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ($t = 0$);
Μονάδες 5
- β) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.
Μονάδες 8
- γ) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.
Μονάδες 7
- δ) Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;
Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **να μην τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ **ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ**

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις ώρες χρήσης των κινητών τηλεφώνων 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας για ένα μήνα:

Ωρες x_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα	Μέσο Διαστήματος K_i	$v_i K_i$
[0 - 2)	5			
[2 - 4)	10			
[4 - 6)	20			
[6 - 8)	10			
[8 - 10)	5			
Αθροίσματα				

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 6

- β) Να βρείτε τη μέση τιμή των ωρών χρήσης των κινητών τηλεφώνων.

Μονάδες 6

- γ) Πόσοι υπάλληλοι της εταιρείας χρησιμοποιούν το κινητό τους τηλέφωνο λιγότερο από έξι (6) ώρες το μήνα;

Μονάδες 5

- δ) Να βρείτε τη διακύμανση της παραπάνω κατανομής.

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{2 - x}, & x < 2 \\ 1, & x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

α) Να υπολογιστούν τα: $f(0)$ και $f(3)$

Μονάδες 4

β) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

Μονάδες 8

γ) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

Μονάδες 6

δ) Να εξεταστεί αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + 5$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 = -1$ τοπικό ακρότατο, να αποδείξετε ότι: $\alpha = 2$.

Μονάδες 10

γ) Για $\alpha = 2$, να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4^ο

Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση $E(x) = 3x^2 + 20x$.

α) Να βρεθεί το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.

Μονάδες 4

β) Να βρεθεί ο τύπος $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

Μονάδες 7

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.

Μονάδες 6

δ) Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος;

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X :

$$16, 14, 22, 18, 20 + \alpha, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:

- α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 7

- β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 10

- γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

- δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρεθεί η παράγουσα της f .

Μονάδες 8

- β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

- γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί και συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \cdot \alpha, & \text{αν } x > 2 \\ 4, & \text{αν } x = 2 \\ \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \end{cases}.$$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 8

δ) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα γ, να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x), \quad 0 < x < 50.$$

Μονάδες 8

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **να μην τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2006

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τα χρόνια υπηρεσίας ενός δείγματος εργαζομένων σε μια εταιρεία.

Χρόνια υπηρεσίας x	[0 – 10)	[10 – 20)	[20 – 30)	[30 – 40)
Εργαζόμενοι v_i	10	α	20	5

- α) Αν ο μέσος χρόνος υπηρεσίας των εργαζομένων του δείγματος είναι $\bar{x} = 19$ χρόνια, να αποδείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 9

- β) Για $\alpha = 15$ να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων (v_i), αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$).

Μονάδες 10

- γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των εργαζομένων του δείγματος που έχουν λιγότερα από 30 χρόνια υπηρεσίας.

Μονάδες 3

- δ) Να υπολογίσετε το ποσοστό (%) των εργαζομένων του δείγματος που έχουν τουλάχιστον 20 χρόνια υπηρεσίας.

Μονάδες 3

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x - 3, & x \leq 1 \\ 2x - \lambda, & x > 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε την τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 8

δ) Να εξετάσετε αν για $\lambda = 2$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x - 6$.

α) Αν $f(0) = 5$, να υπολογίσετε τον τύπο της αρχικής (παράγουσας) συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε τη συνάρτηση f που βρήκατε στο ερώτημα α :

(i) ως προς τη μονοτονία

Μονάδες 8

(ii) ως προς τα ακρότατα

Μονάδες 8

γ) Να υπολογίσετε τα: $f''(2)$ και $f''(-3)$.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45m, τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ sec}$. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από $t \text{ sec}$ πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση: $S(t) = 5t^2$ (μέτρα m).

α) Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο $t = 2 \text{ sec}$.

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος, είναι $t = 3 \text{ sec}$.

Μονάδες 7

γ) Να υπολογίσετε:

(i) τον τύπο της ταχύτητας $v(t)$ του σώματος κάθε χρονική στιγμή t .

Μονάδες 7

(ii) την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

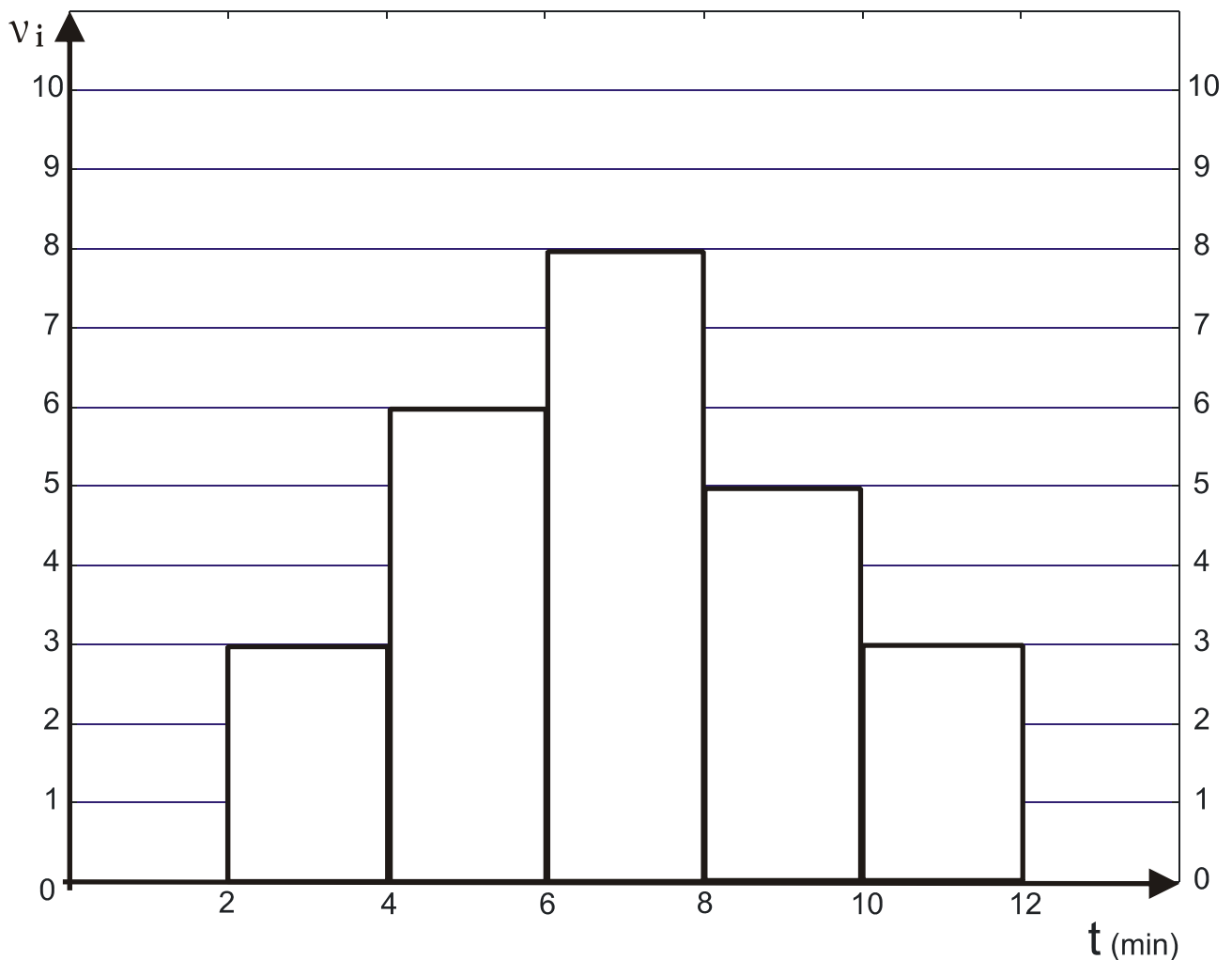
ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Οι χρόνοι καθυστέρησης που παρατηρήθηκαν σε 25 δρομολόγια ενός οργανισμού σιδηροδρόμων δίνονται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:



- α. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε με τη βοήθεια του παραπάνω ιστογράμματος συχνοτήτων.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Διάστημα	Συχνότητα ν_i	Μέσο διαστήματος K_i	$\nu_i K_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Σχετική αθροιστική συχνότητα %
[2, 4)					
[4, 6)					
[6, 8)					
[8, 10)					
[10,12)					
Αθροίσματα					

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το μέσο χρόνο καθυστερήσεων των δρομολογίων.

Μονάδες 5

γ. Πόσα δρομολόγια είχαν καθυστέρηση τουλάχιστον 6 λεπτά;

Μονάδες 5

δ. Ποιο είναι το ποσοστό των δρομολογίων που είχαν καθυστέρηση λιγότερο από 8 λεπτά;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x} & , \quad \text{αν } x < 0 \\ -3 + \beta & , \quad \text{αν } x = 0 \\ e^x - \alpha & , \quad \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

Μονάδες 4

γ. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Μονάδες 8

δ. Για την τιμή $\alpha=4$ να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + kx + \lambda$, $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$ και το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση,

α. να δείξετε ότι $k=-2$ και $\lambda=1$.

Μονάδες 12

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο f'' της f .

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $f(x) + f'(x) + f''(x) > 0$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 10 \ln x - 5x^2$, $x > 0$.

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f .

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι $f(x) \leq -5$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Εξετάσαμε ένα δείγμα πενήντα (50) μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου ως προς τον αριθμό των ορθογραφικών λαθών που έκαναν σε ένα κείμενο Αρχαίων Ελληνικών. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Λάθη (x_i)	Μαθητές (n_i)	Σχετική Συχνότητα % ($f_i\%$)
2		2ω
5		4ω
6		3ω
8		ω
Αθροίσματα		

α. Να αποδείξετε ότι $\omega=10$.

Μονάδες 7

β. Για $\omega=10$

β1. Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 9

β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των ορθογραφικών λαθών των μαθητών του δείγματος.

Μονάδες 5

β3. Αν στο παραπάνω δείγμα προστεθούν πενήντα (50) μαθητές με μέση τιμή αριθμού ορθογραφικών λαθών έξι (6), να βρείτε τη νέα μέση τιμή του αριθμού των λαθών στο δείγμα των 100 μαθητών.

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{3-x} + x^2 + kx - 2, & \text{αν } x \leq 3 \\ \frac{2x^2 - 6x}{x-3}, & \text{αν } x > 3 \end{cases},$$

όπου k πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την τιμή του k για την οποία η f είναι συνεχής στο $x_0=3$.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την τιμή $f''(2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 6

δ. Να δείξετε ότι $f(0) \cdot f(3) - f'(2) = 0$.

Μονάδες 7

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 2 m προσθέτουμε πετρέλαιο. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min), είναι

$$h(t) = \frac{t^2}{18},$$

α. να βρείτε το ύψος της στάθμης σε χρόνο $t=3$ min.

Μονάδες 5

β. να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου της δεξαμενής μετά από χρόνο t min δίνεται από τον τύπο $V(t) = \frac{2t^2}{9} \text{ m}^3$.

Μονάδες 7

γ. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου τη χρονική στιγμή $t=5$ min.

Μονάδες 7

δ. να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμμία άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα ήταν:

8, 14, 20, 12, 16

α. Να υπολογισθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.

Μονάδες 4

β. Να προσδιορισθεί η διάμεσος.

Μονάδες 3

γ. Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 6

δ. Να υπολογισθεί το εύρος.

Μονάδες 3

ε. Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας και στη συνέχεια να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)}, & \text{αν } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda \neq 0$.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 10

β. Να υπολογισθεί το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 6

γ. Να υπολογισθεί η τιμή του λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στη θέση $x_0=1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=e^{\lambda x}$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

β. Να προσδιορισθούν οι τιμές του λ , ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$$

Μονάδες 9

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία όταν
i) $\lambda = 2$,

ii) $\lambda = -1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$,
όπου $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος f' της f .

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β. Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 12

- γ. Να δειχθεί ότι $f(x) \geq 2008$ για κάθε πραγματικό αριθμό x , όπου $x \in [1, +\infty)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **να μην τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται ο πίνακας

x_i	v_i
1	5
2	10
3	20
4	$2a$
5	5
Αθροίσματα	

με τις τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X και τις αντίστοιχες συχνότητες.

α. Να υπολογίσετε το φυσικό αριθμό a εάν ισχύει ότι η μέση τιμή είναι 3.

Μονάδες 15

β. Για $a = 5$ να υπολογίσετε:

i) Τη διάμεσο

Μονάδες 5

ii) Την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \cdot e^x$

α. Να βρείτε:

i) την πρώτη παράγωγο της f

Μονάδες 4

ii) τη δεύτερη παράγωγο της f .

Μονάδες 4

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- β. Να δείξετε ότι ισχύει
 $f''(x) - f'(x) = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

- γ. Να υπολογίσετε το
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f''(x) + f'(x)}{x - 1}.$$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x} - 1}, & 0 < x < 1 \\ -a^2 + 5a, & x = 1 \\ 2e^{x-1} + 2, & x > 1 \end{cases}$$

όπου a πραγματικός αριθμός.

- α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 10

- β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 4

- γ. Να υπολογίσετε τις τιμές του a για τις οποίες η f είναι συνεχής στο $x_1 = 1$.

Μονάδες 6

- δ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_2 = 2$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + a + 2008$, όπου a πραγματικός αριθμός.

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο, το οποίο να υπολογίσετε συναρτήσει του a .

Μονάδες 8

δ. Να υπολογίσετε το a αν το τοπικό ελάχιστο είναι ίσο με 2009.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ **ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ**

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζεται το πλήθος των τηλεφωνικών κλήσεων που πραγματοποίησαν 25 συνδρομητές μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας.

Πλήθος κλήσεων x_i	Πλήθος συνδρομητών v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	Αθροιστική σχετική συχνότητα (%)	$x_i \cdot v_i$
2	4				
3	6				
4	5				
5	7				
6	2				
7	1				
Αθροίσματα	25				

- α. Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 8

- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του πλήθους των κλήσεων.

Μονάδες 6

- γ. Να βρείτε πόσοι συνδρομητές πραγματοποίησαν το πολύ 4 κλήσεις.

Μονάδες 6

- δ. Να βρείτε το ποσοστό των συνδρομητών που πραγματοποίησαν τουλάχιστον 5 κλήσεις.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8x + 12}{x - 6} & , \text{ αν } x > 6 \\ 3\lambda - 5 & , \text{ αν } x = 6 \\ e^{x-6}(2x - \mu) & , \text{ αν } x < 6 \end{cases}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 6^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε την τιμή του μ έτσι ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

Μονάδες 6

δ. Για $\mu=8$ να βρείτε τον αριθμό λ έτσι ώστε η f να είναι συνεχής στο $x=6$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x-2}{e^x}, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι για $x=3$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με $\frac{1}{e^3}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$, όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(0, -5)$ και η συνάρτηση f για $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, τότε:

α. Να βρείτε τις τιμές των k και λ

Μονάδες 13

β. Για $k=2$ και $\lambda=3$,

i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

ii. να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της f .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **να μην τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις 18.00.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Δίνεται ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων

x_i	v_i	f_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα	$x_i v_i$
0	20				
1	15				
2	5				
3	10				
Αθροίσματα					

- α. Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 15

- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$

Μονάδες 3

- γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ

Μονάδες 4

- δ. Αν R το εύρος των παρατηρήσεων να αποδείξετε
ότι: $10\bar{x} + \delta - 4R = 0$

Μονάδες 3

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \\ 2\lambda x - 3, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Μονάδες 7

δ. Για $\lambda = 2$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
 $K = 2f(2) - 3f(-1)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f

Μονάδες 8

β. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α για την οποία ισχύει $(\alpha - 1)f'(0) + 4f''(1) = 27$

Μονάδες 9

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln x - x - 1$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
Μονάδες 4
- β. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f
Μονάδες 6
- γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.
Μονάδες 10
- δ. Να αποδείξετε ότι: $\ln 2008 - 2009 > \ln 2009 - 2010$
Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β' ΚΥΚΛΟΥ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Οι ηλικίες έξι παιδιών από μια γειτονιά είναι:

$$2, 6, 6+x, 11, 11, 12+x$$

όπου $x \in \mathbb{R}$.

A1. Αν η μέση τιμή των ηλικιών των παιδιών είναι 9, να αποδείξετε ότι $x=3$.

Μονάδες 5

Για $x=3$,

A2. να βρείτε τη διάμεσο των ηλικιών,

Μονάδες 4

A3. να υπολογίσετε το εύρος των ηλικιών και την επικρατούσα τιμή τους,

Μονάδες 4

A4. να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των ηλικιών και

Μονάδες 8

A5. να εξετάσετε αν το δείγμα των ηλικιών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 4

(Δίνεται $\sqrt{17} \approx 4,12$).

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x + 3x - \lambda, & 0 < x < 1 \\ \mu^2 + 1, & x = 1 \\ \frac{x - x^2}{1 - \sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

B3. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Μονάδες 4

B4. Για $\lambda=1$ να βρεθεί για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0=1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = e^x (x^2 - 3)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

Γ3. Για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα; Να προσδιορίσετε το είδος τους και να υπολογίσετε τις τιμές τους.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f'(x) = x^2 - 3x + \lambda$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός λ .

Μονάδες 10

Για $\lambda = 2$,

Δ2. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και το είδος των ακροτάτων,

Μονάδες 7

Δ3. να συγκριθούν μεταξύ τους οι τιμές της συνάρτησης για $x_1 = \frac{6}{5}$ και $x_2 = \frac{3}{2}$, καθώς επίσης και οι τιμές της συνάρτησης για $x_3 = 4$ και $x_4 = 6$.

Μονάδες 8

ΟΛΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τις ερωτήσεις να μην τις αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
3. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
4. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
5. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας ανεξίτηλης μελάνης.**
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις **18:00**.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟΦΟΙΤΩΝ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ

ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΜΑΪΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Οι βαθμοί έξι φοιτητών σε ένα μάθημα είναι:

5, 3, 7, 2, 5, 8

Για τα δεδομένα αυτά να υπολογίσετε:

A1. Το εύρος

Μονάδες 3

A2. Τη μέση τιμή

Μονάδες 5

A3. Τη διάμεσο

Μονάδες 5

A4. Την επικρατούσα τιμή

Μονάδες 5

A5. Τη διακύμανση S^2

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{2 - x} \quad \text{με } x \neq 2$$

και

$$g(x) = 6 - \sqrt{x + 2} \quad \text{με } x \geq -2$$

Να υπολογίσετε:

B1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 7

B2. $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Μονάδες 5

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Εάν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$, να αποδείξετε ότι

B3. $\lim_{x \rightarrow 2} (g(x) + 8x) = 20$ και

Μονάδες 6

B4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 8, & x \leq 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}, & x > 4 \end{cases}$$

Γ1. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(4)$ και $f(16)$

Μονάδες 6

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

Μονάδες 3

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

Μονάδες 5

Γ4. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_1 = 4$

Μονάδες 6

Γ5. Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο $x_2 = 0$, ισούται με 3.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + \alpha + \frac{1}{3}, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της f

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + f''(x)}{x + 1}$

Μονάδες 4

Δ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να προσδιορίσετε τις τιμές του x , για τις οποίες η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

Δ4. Εάν το τοπικό μέγιστο της f είναι τριπλάσιο από το τοπικό της ελάχιστο, να βρείτε τον αριθμό α .

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα. Να μη χρησιμοποιηθεί το μιλιμετρέ φύλλο του τετραδίου.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας ανεξίτηλης μελάνης.**
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων και όχι πριν τις **18.00**.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται εύρος μιας μεταβλητής;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή (μέσος όρος) υπολογίζεται μόνο σε ποσοτικές μεταβλητές. (Μονάδες 2)

β) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και είναι $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$
αντίστοιχα, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$

(Μονάδες 2)

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x), x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι $\int_a^b \eta \mu x \, dx = \text{συν} \beta - \text{συν} \alpha$ (Μονάδες 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(\ln x)' = \dots\dots\dots$, με $x > 0$ (Μονάδες 3)

β) $(\eta \mu x)' = \dots\dots\dots$ (Μονάδες 3)

γ) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \dots\dots\dots$

(Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}, & \text{αν } x < 4 \\ \alpha & \text{αν } x = 4 \\ \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} - 3, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

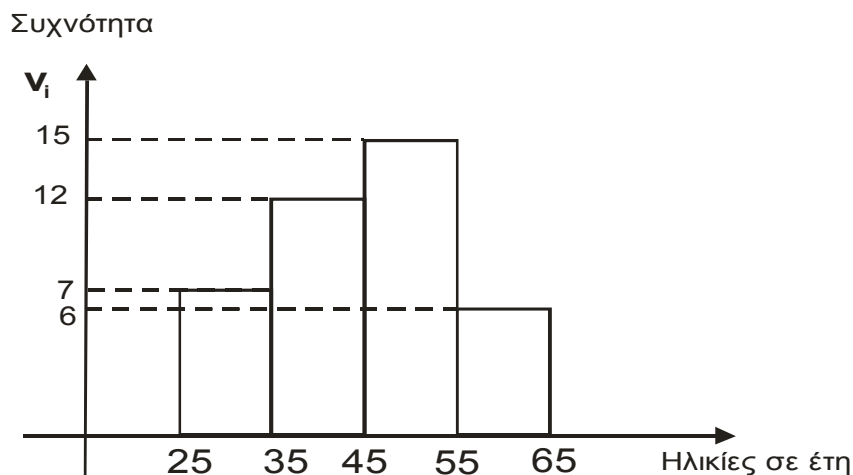
B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ (Μονάδες 10)

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ (Μονάδες 10)

B3. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$. (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα, που αφορά τις ηλικίες 40 εργαζομένων σε μια επιχείρηση.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα.

Ηλικίες [,)	Μέσο διαστήματος K_i	Συχνότητα v_i		Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$
[25,35)					
[35,45)					
[45,55)					
[55,65)					
Σύνολα					

Μονάδες 10

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων.

Μονάδες 5

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών;

Μονάδες 5

Γ4. Τί ποσοστό εργαζομένων έχουν ηλικία κάτω των 35 ετών;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της. **Μονάδες 6**

Δ2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^3 f'(x) dx$

Μονάδες 6

Δ4. Αν $g(x) = 3x^2 - 12x + 9$ με $x \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=3$. **Μονάδες 8**

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.30 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. α) Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα τιμής x_i μιας μεταβλητής;

(Μονάδες 4)

β) Έστω $v_1, v_2, \dots, v_k$ οι συχνότητες των τιμών μιας μεταβλητής ενός δείγματος μεγέθους n και $f_1, f_2, \dots, f_k$ οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i) $v_1 + v_2 + \dots + v_k =$

(Μονάδες 2)

ii) $f_1 + f_2 + \dots + f_k =$

(Μονάδες 2)

Μονάδες 8

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εύρος τιμών μιας μεταβλητής είναι η διαφορά της μικρότερης τιμής από τη μεγαλύτερη.

(Μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

β) Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ όπου

$$\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \text{ τότε: } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$

(Μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι $\int_a^b e^x dx = e^a - e^b$

(Μονάδες 2)

Μονάδες 8

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x^a)' = \dots$ με $a \in \mathbb{R}^*, x > 0$

(Μονάδες 3)

β) $(\varepsilon \varphi x)' = \dots$ με $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

(Μονάδες 3)

γ) $\int_a^b \eta \mu x dx = \dots$

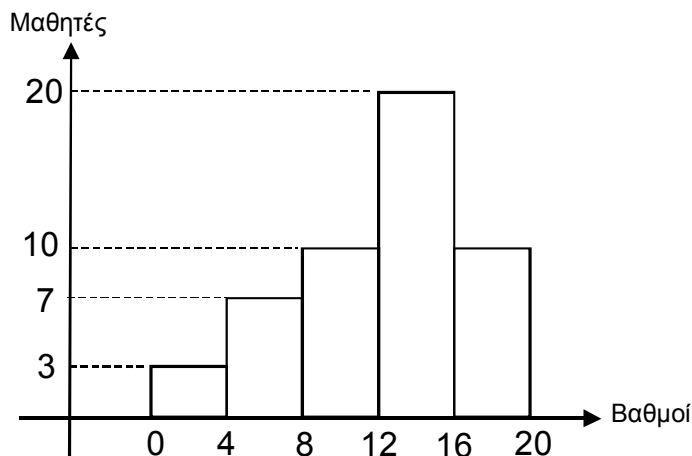
(Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί στο μάθημα των Μαθηματικών 50 μαθητών σε ένα διαγώνισμα έχουν ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους: $[0,4)$, $[4,8)$, ..., $[16,20)$. Η συχνότητα των κλάσεων αυτών φαίνεται στο παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων:

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ



B1. Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$).

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες 5

B3. Τι ποσοστό μαθητών έχει βαθμό τουλάχιστον 12;

Μονάδες 5

B4. Να μεταφέρετε το ιστόγραμμα στο τετράδιό σας και να δείξετε γραφικά ότι η επικρατούσα τιμή είναι ίση με 14.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, όπου $x > 1$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Μονάδες 9

Γ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_2^3 \frac{-2}{(x-1)^2} dx$$

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Κατόπιν να συγκρίνετε τις τιμές $f(2010)$ και $f(2011)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x + 5, \quad \text{όπου } \alpha = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 6

Δ2. Αν $\alpha = -4$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

Δ3. Αν $\alpha = -4$, να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\alpha = -4$, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.30 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[α,β]$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx, \text{ με } \alpha < \gamma < \beta. \text{ (Μονάδες 2)}$$

δ) Ισχύει ότι: $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x > 0$ (Μονάδες 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:
- $$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx \quad (\text{Μονάδες } 2)$$

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$ με $\beta > \alpha > 0$ (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει ότι:

$(g \circ f)'(x) = \dots$ (Μονάδες 3)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} c dx = \dots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i v_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	$2\kappa + 1$			
Σύνολα	$v = 25$		100	

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ

Μονάδες 4

B2. Για $\kappa=3$ να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

B3. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

B4. Για $\kappa=3$ να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f , αν $F(0)=1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x)=x^3-x^2-x+1$, $x \in \mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F .

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές $F(2011)$ και $F(2012)$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται αθροιστική συχνότητα μιας τιμής x_i σε ποσοτική μεταβλητή;

Μονάδες 5

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Τα άκρα των διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f , μπορούν να θεωρηθούν ως πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων. (Μονάδες 2)

β) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς. (Μονάδες 2)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο x_0 , τότε το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 2)

δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ όπου $\ell_1 \in \mathbb{R}$, τότε είναι :

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^v = \ell_1^v$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$ (Μονάδες 2)

ε) Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < 0$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

A3. Να γράψετε στο τετράδιό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, το γράμμα που συμπληρώνει σωστά την πρόταση.

1. Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων $f_1+f_2+f_3+...+f_k$ ενός δείγματος μεγέθους n είναι ίσο με:

(α) 1 (β) 10 (γ) 50 (Μονάδες 2)

2. Η παράγουσα της συνάρτησης $\sin x$ είναι ίση με:

(α) $\cos x + c$ (β) $\sin x + c$ (γ) $-\sin x + c$

(Μονάδες 2)

3. Το $\int_{\alpha}^{\beta} 1 dx$ είναι ίσο με:

(α) $\beta + \alpha$ (β) $\beta - \alpha$ (γ) $\alpha - \beta$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $(cf)'(x) = \dots\dots\dots$ όπου $c \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 2)

β) $(gof)'(x) = \dots\dots\dots$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί 20 φοιτητών που πέρασαν επιτυχώς τα ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι είναι οι παρακάτω:

5, 7, 8, 6, 8, 6, 9, 5, 8, 8, 6, 8, 7, 6, 7, 8, 8, 6, 9, 5

B1. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($f_i\%$).

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των φοιτητών.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

B3. Να βρείτε την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 3

B4. Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 3

B5. Τι ποσοστό φοιτητών έχει βαθμό τουλάχιστον 8;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\kappa} & , \quad x < 1 \\ x^2 + \kappa & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

όπου κ πραγματικός αριθμός, διάφορος του 0.

Γ1. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να δείξετε ότι $\kappa=1$ ή $\kappa=-2$

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\kappa=1$, να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$, όταν $x>1$

Μονάδες 4

Γ3. Αν $\kappa=1$, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$A=f(50) - f'(245)+1$$

Μονάδες 6

Γ4. Αν $\kappa=1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 f(x)dx$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = x^2 + \lambda x - 6$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

Δ1. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 3$, να δείξετε ότι $\lambda = -1$

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ2. Αν $\lambda = -1$, να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το είδος των ακροτάτων.

Μονάδες 10

Δ3. Αν $\lambda = -1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F . Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β ;

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

(Μον. 2)

β) Εάν οι συναρτήσεις $f, g:A\rightarrow\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x)\neq 0$, τότε ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(Μον. 2)

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(Μον. 2)

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

δ) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} e^x dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

(Μον. 2)

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta \mu x dx = \dots$

(Μον. 3)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c μία σταθερά, τότε:

$(c \cdot f)'(x) = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν $a \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε:

$(x^a)' = \dots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$.

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €):

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	$v = \dots$	100	

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μισθών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 €;

Μονάδες 7

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^2(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = (x-2)(3x+2\alpha-2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α , αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για $\alpha=-5$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=3x^2-12x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x)=6x-24$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω , που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) και $x_0 \in A$. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας της συνάρτησης f στο x_0 .

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές και εξαρτάται από όλες τις τιμές της μεταβλητής. (Μον. 2)

β) Επικρατούσα τιμή μιας μεταβλητής ονομάζεται η τιμή με τη μικρότερη συχνότητα. (Μον. 2)

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ με $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ και $\ell_2 \neq 0$,

τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$. (Μον. 2)

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε απαραίτητα θα είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. (Μον. 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$. Τότε ισχύει $\int_a^a f(x) dx = 0$. (Μον. 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $(e^x)' = \dots$ (Μον. 3)

β) $(\ln x)' = \dots$, όπου $x > 0$ (Μον. 3)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin x \, dx = \dots$ (Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - \alpha x + \beta, & x \leq 3 \\ \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}, & x > 3 \end{cases} \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

B1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

Μονάδες 10

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τα α, β , ώστε $f(0)=5$ και η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=3$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Σε ένα ορεινό χωριό μετρήθηκε η μεγαλύτερη ημερήσια θερμοκρασία για οκτώ (8) συνεχείς ημέρες. Οι τιμές των θερμοκρασιών που καταγράφηκαν είναι οι παρακάτω:

1, 9, 7, 5, 11, α , 1, -1

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

Γ1. Αν η μέση τιμή των παραπάνω τιμών των θερμοκρασιών είναι $\bar{X}=5$, να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α .

Μονάδες 5

Γ2. Για $\alpha=7$, να υπολογίσετε τη διάμεσο και το εύρος των παραπάνω τιμών των θερμοκρασιών.

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha=7$, να υπολογίσετε τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των παραπάνω τιμών των θερμοκρασιών.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\alpha=7$, να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβλητότητας (CV) και να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα θερμοκρασιών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x + \kappa, \kappa \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να βρεθεί το κ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1,5)$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $\kappa=3$, να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

Δ3. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1-x}$.

Μονάδες 7

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f''(x) dx$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)**

**ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η F είναι μία

παράγουσα της f , τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha)$

(Μον. 2)

β) Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της.

(Μον. 2)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c \in \mathbb{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύει:

$$(c \cdot f)'(x) = f'(x) + c$$

(Μον. 2)

δ) $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha+1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

(Μον. 2)

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx.$$

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε: $(f - g)'(x) = \dots$

(Μον. 3)

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \dots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x \cdot f(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, για $x \neq 2$.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ηλικίες των υπαλλήλων μίας εταιρείας:

Α/Α	Ηλικίες υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i \nu_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
1 ^η κλάση	[25, 35)	100			
2 ^η κλάση	[35, 45)	50			
3 ^η κλάση	[45, 55)	40			
4 ^η κλάση	[55, 65)	10			
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu=200$			

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση ηλικία των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία τουλάχιστον σαράντα πέντε (45) ετών.

Μονάδες 4

Γ4. Από την εταιρεία αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι της 4^{ης} κλάσης, πέντε (5) υπάλληλοι της 2^{ης} κλάσης και ταυτόχρονα προσλαμβάνονται δέκα (10) υπάλληλοι με ηλικίες στην 1^η κλάση. Να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή της ηλικίας των υπαλλήλων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x-1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = f(x) + e^x$.

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $g(x) = f(x) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α')

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αναφέρετε, ονομαστικά, τις τρεις (3) παραμέτρους θέσης μιας μεταβλητής.

Μονάδες 3

A2. Να δώσετε τον ορισμό της επικρατούσας τιμής μιας μεταβλητής.

Μονάδες 3

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διάμεσος επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής. (Μον. 2)

β) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. (Μον. 2)

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx$ (Μον. 2)

δ) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) . (Μον. 2)

ε) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Μον. 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

A4. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα **α, β, γ** από τη στήλη **A** και δίπλα τον αριθμό **1,2,3,4** της στήλης **B** που δίνει τη σωστή αντιστοίχιση. Σημειώνεται ότι ένας αριθμός από τη στήλη B θα περισσέψει.

Στήλη A (Συνάρτηση f)	Στήλη B (Παράγουσα F)
α. $f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$	1. $F(x) = x + c$
β. $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$	2. $F(x) = -\frac{1}{x^2} + c$
γ. $f(x) = \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}$	3. $F(x) = \ln x + c$
	4. $F(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Σε ένα εκλογικό τμήμα προσήλθαν και ψήφισαν 300 πολίτες επιλέγοντας ένα (1) από τα πέντε (5) ψηφοδέλτια Α, Β, Γ, Δ, Ε. Τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα, όπου λ είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

Ψηφοδέλτιο (x_i)	Ψήφοι (v_i)	Σχ.συχνότητα (f_i)	Σχ.συχνότητα ($f_i\%$)
A			8λ
B			6λ
Γ			3λ
Δ			2λ
E			λ
Σύνολο	300	1	100

B1. Να υπολογίσετε την τιμή του λ.

Μονάδες 5

B2. Για $\lambda = 5$, να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 15

B3. Για $\lambda = 5$, να γίνει το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$).

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{1 - x}, & x > 1 \\ 2\alpha + 3, & x = 1 \\ x^2 - \beta, & x < 1 \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 3

Γ2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε τα α, β , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Μονάδες 8

Γ4. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 2$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = 20f(-10) - 5f(10) - 4f(1)$.

Μονάδες 4

Γ5. Για $\beta = 2$, να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Ένας κήπος, σχήματος ορθογωνίου, με διαστάσεις x και y έχει εμβαδό 100 m^2 .

Δ1. Με δεδομένο ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = x \cdot y$, να αποδείξετε ότι η περίμετρος του κήπου δίνεται από τη συνάρτηση: $\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}$, $0 < x < 100$.

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε ο κήπος να έχει ελάχιστη περίμετρο, την οποία και να υπολογίσετε.

Μονάδες 12

Δ3. Για την τιμή του x , που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το κόστος της περιφράξης του κήπου, αν η περιφράξη στοιχίζει 10 € ανά μέτρο.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε **όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)**

**ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Για μία συνεχή συνάρτηση f να γράψετε τις τρεις κατηγορίες σημείων, τα οποία είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η επικρατούσα τιμή μίας μεταβλητής είναι μοναδική.

(Μον. 2)

β) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f (δηλαδή $f'(x_0) = 0$). Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όταν $f''(x_0) < 0$.

(Μον. 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, \beta]$. Τότε ισχύει:

$$\int_a^a f(x)dx = a, \text{ όπου } a \in \mathbb{R}^*$$

(Μον. 2)

δ) Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε και η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

(Μον. 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ε) Η σχετική συχνότητα τιμής x_i μίας μεταβλητής συμβολίζεται με f_i και ισχύει $f_i = \frac{v_i}{v}$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \dots$, με $\beta > \alpha > 0$

(Μον. 3)

β) $(c)' = \dots$, αν c σταθερά

(Μον. 3)

γ) Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $v_1, v_2, \dots, v_k$ τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι: $\bar{x} = \dots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) 50 μαθητών της Γ΄τάξης ενός ΕΠΑ.Λ για να γράψουν ένα διαγώνισμα, δίνονται στον παρακάτω πίνακα κατανομής:

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot v_i$
[5 – 15)		20		
[15 – 25)			34	
[25 – 35)		12		
[35 – 45)				
ΣΥΝΟΛΑ		$v = 50$		

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να τον συμπληρώσετε σωστά.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου, που χρειάστηκαν οι μαθητές για να γράψουν το διαγώνισμα.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 (Μον. 7) και την τυπική απόκλιση s της μεταβλητής (Μον. 2).

Μονάδες 9

B4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV%.

Μονάδες 4

(Δίνεται: $\sqrt{96} \approx 10$)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} & , \text{ αν } x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2}, & \text{ αν } x \leq 2 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\lambda=1$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Μία ομάδα περιβαλλοντολόγων εκτιμά ότι το βάρος B (B σε τόνους) ενός παγόβουνου μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \leq t \leq 10$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου.

Μονάδες 5

Δ2. Ποιά χρονική στιγμή το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι, αν $t \in [6, 9]$, τότε ισχύει:

$$B(9) \leq B(t) \leq B(6)$$

Μονάδες 5

Δ4. Ποιά χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος;

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)

ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται εύρος των τιμών μίας ποσοτικής μεταβλητής;

Μονάδες 5

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή εξαρτάται από όλες τις τιμές μίας μεταβλητής.
(Μον. 2)

β) Αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2, \text{ όπου } \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}, \text{ τότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$

(Μον. 2)

γ) Οι ποιοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

(Μον. 2)

δ) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

(Μον. 2)

ε) Το ορισμένο ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε σωστά τις ισότητες.

α) $(f \cdot g)'(x) = \dots$

β) $(\sin x)' = \dots$

γ) $\int_a^\beta e^x dx = \dots$

δ) $(\ln x)' = \dots, \quad x > 0$

ε) $\int_a^\beta 1 dx = \dots$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} 3a - 2x, & x < 3 \\ 2\beta - 4, & x = 3 \\ \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x > 3 \end{cases}$$

όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

Μονάδες 3

B2. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

Μονάδες 6

B3. Να βρεθούν οι τιμές των a, β , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.

Μονάδες 10

B4. Για $a = 4$ και $\beta = 5$ η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x) = \begin{cases} 12 - 2x, & x < 3 \\ 6, & x = 3 \\ x + 3, & x > 3 \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι τιμές: $f(0), f(1), f(3), f(4), f(5)$ και να βρεθεί η διάμεσος αυτών.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι ημέρες απουσίας 50 μαθητών της Δ΄ τάξης ενός Εσπερινού ΕΠΑ.Λ. κατά τον μήνα Μάρτιο:

Ημέρες απουσίας	Κέντρο Κλάσης κ_i	Συχνότητα ν_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i \%$	$\kappa_i \nu_i$
[0 – 2)	1				
[2 – 4)	3	10			
[4 – 6)	5	12			
[6 – 8)	7	8			
[8 – 10)	9	a			
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$			

Γ1. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου a , για την οποία ισχύει: $a = \int_0^1 (2x + 4)dx$

Μονάδες 4

Γ2. Για $a = 5$ να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 9

Γ3. Για $a = 5$ να βρεθεί η μέση τιμή των ημερών απουσίας των μαθητών.

Μονάδες 4

Γ4. Για $a = 5$ να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που απουσίασαν τουλάχιστον 6 ημέρες.

Μονάδες 4

Γ5. Για $a = 5$ να βρεθεί η διάμεσος.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ- Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Η ημερήσια είσπραξη (σε €) μίας μονάδας παραγωγής χάλυβα από την πώληση x τόνων χάλυβα δίνεται από τη συνάρτηση

$$E(x) = 250x, \quad 0 \leq x \leq 20,$$

ενώ το συνολικό κόστος παραγωγής αυτής της ποσότητας δίνεται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 10x^2 - 50x + 500$$

Δ1. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση του κέρδους είναι:

$$P(x) = -10x^2 + 300x - 500$$

Μονάδες 6

Δ2. Να βρεθεί το κέρδος της μονάδας παραγωγής από την πώληση 10 τόνων χάλυβα.

Μονάδες 5

Δ3. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους;

Μονάδες 3

Δ4. Πόση ποσότητα χάλυβα πρέπει να πουληθεί, ώστε το κέρδος της μονάδας παραγωγής να γίνει μέγιστο;

Μονάδες 7

Δ5. Να βρεθεί το μέγιστο κέρδος της μονάδας παραγωγής.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.**
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 10

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν το n είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

(Μον. 2)

β) $(\sqrt{3})' = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

(Μον. 2)

γ) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ βρίσκεται το 68% περίπου των παρατηρήσεων.

(Μον. 2)

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1, ℓ_2

πραγματικοί αριθμοί τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x)) = \ell_1 \ell_2 .$$

(Μον. 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

(Μον. 2)
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των πιστωτικών καρτών που έχουν 20 υπάλληλοι μιας επιχείρησης.

Αριθμός πιστωτικών καρτών x_i	Αριθμός υπαλλήλων v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i v_i$
0	5			
1		9		
2			10	
3				
4				
ΣΥΝΟΛΑ				

- B1.** Αν γνωρίζετε ότι η 5^η συχνότητα (v_5) ισούται με την 1^η συχνότητα (v_1), να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

- B2.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των πιστωτικών καρτών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

- B3.** Να υπολογίσετε τον αριθμό των υπαλλήλων που έχουν το πολύ 3 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

- B4.** Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν τουλάχιστον 2 πιστωτικές κάρτες.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 12

Γ4. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2015)$ και $f(2016)$ της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^2 + \alpha x - 3, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 3

Δ3. Για $\alpha = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(-2, f(-2))$.

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ4. Αν τα σημεία $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4), A_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στην ευθεία $\varepsilon: y = -2x - 7$ και οι τετμημένες x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των σημείων A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 2$, να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{y}$ των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων αυτών.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται **συχνότητα** τιμής x_i μιας μεταβλητής ενός δείγματος.

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς χρησιμοποιεί μόνο τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

(Μον. 2)

β) $(e^x)' = xe^{x-1}$.

(Μον. 2)

γ) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f', g' . Τότε ισχύει ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta}.$$

(Μον. 2)

δ) Η παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ είναι η $F(x) = -\eta\mu x + c$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

(Μον. 2)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Η παράγωγος συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ο ρυθμός μεταβολής ενός μεγέθους σε οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής του.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

- α) Αν οι συναρτήσεις $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g} (g \neq 0)$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots$$

(Μον. 3)

β) $\int_{\alpha}^{\beta} 1 dx = \dots$

(Μον. 3)

- γ) Αν $f_1, f_2, \dots, f_k$ είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών $x_1, x_2, \dots, x_k$ αντίστοιχα μιας μεταβλητής, τότε ισχύει: $f_1 + f_2 + \dots + f_k = \dots$, όπου k το πλήθος των διαφορετικών τιμών της μεταβλητής.

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής:

x_i	Συχνότητα n_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	$x_i \cdot n_i$
0		5		
1		9		
2		16		
3		20		
4				
ΣΥΝΟΛΑ	25			

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

B1. Να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 9

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ .

Μονάδες 3

B4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να βρείτε την $f'(x)$.

Μονάδες 5

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

Γ3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$h(x) = 6x + 9, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-1}, & x \in [0, 1) \\ \alpha x^2 + \beta x, & x \in [1, +\infty), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Δ1. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $f'(2) = 2$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α')**
**ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β')**
ΠΕΜΠΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΕΣΠΕΡΙΝΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Πότε η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 6

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η επικρατούσα τιμή μιας μεταβλητής είναι μοναδική.

(Μον. 2)

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \ell$.

(Μον. 2)

γ) Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο

$x_0 \in A$, τότε η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο

x_0 με $g(x_0) \neq 0$.

(Μον. 2)

δ) $(\sin x)' = -\eta\mu x$.

(Μον. 2)

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \ln \beta - \ln \alpha$, $\beta > \alpha > 0$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) Αν $f_1, f_2, \dots, f_k$ οι σχετικές συχνότητες k διαφορετικών τιμών μιας μεταβλητής τότε:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \dots$$

(Μον. 3)

β) Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ($g \neq 0$) είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dots, \quad \text{με } g(x) \neq 0.$$

(Μον. 3)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx = \dots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + 1, & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & 0 \leq x < 2 \\ \alpha - x, & x \geq 2 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

B1. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

B2. Για ποια τιμή της παραμέτρου α η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 10

B3. Αν $\alpha=6$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_2^3 f(x) dx .$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται πόσες ώρες συνδέονται στο διαδίκτυο οι μαθητές ενός Εσπερινού ΕΠΑΛ κατά τη διάρκεια μιας ημέρας:

Ώρες x_i	Μαθητές v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	$x_i v_i$
0	10				
1	15				
2	v_3				
3	5				
Σύνολα					

Γ1. Να υπολογιστεί η συχνότητα v_3 , αν η διάμεσος των ωρών είναι $\delta=1,5$.

Μονάδες 5

Γ2. Για $v_3=20$ να μεταφέρετε τον πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ3. Για $v_3=20$ να βρείτε τη μέση τιμή των ωρών σύνδεσης των μαθητών στο διαδίκτυο.

Μονάδες 5

Γ4. Για $v_3=20$ να παρουσιάσετε σε μορφή ραβδογράμματος τα δεδομένα (x_i, v_i) .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Το ύψος σε μέτρα ενός τηλεκατευθυνόμενου αεροπλάνου μετά από t sec πτήσης δίνεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -3t^2 + 30t, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα της ανόδου του αεροπλάνου από τη στιγμή της απογείωσής του μέχρι το μέγιστο ύψος καθώς και το χρονικό διάστημα της καθόδου από το μέγιστο ύψος μέχρι την προσγείωσή του.

Μονάδες 10

Δ3. Σε ποια χρονική στιγμή το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος.

Μονάδες 5

Δ4. Να βρεθεί το μέγιστο ύψος στο οποίο έφτασε το αεροπλάνο.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.**
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Α' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μιας ποσοτικής μεταβλητής.

(Μον. 2)

β) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(Μον. 2)

γ) Το εύρος (R) είναι ένα μέτρο διασποράς.

(Μον. 2)

Μονάδες 6

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $(x^p)' = \dots$, όπου p ρητός αριθμός.

(Μον. 3)

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Α' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

β) $(\sin x)' = \dots$

(Μον. 3)

γ) Αν $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι τιμές μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), τότε ο σταθμικός μέσος βρίσκεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \dots$$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι βαθμοί ενός φοιτητή σε 10 μαθήματα είναι:

$$4, \kappa, 5, 6, 2\kappa+1, 4, 6, \kappa+2, 6, 4$$

όπου:

$$\kappa = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

B1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 7

B2. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη μέση τιμή $(\bar{x})$ των βαθμών του φοιτητή.

Μονάδες 5

B3. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2) .

Μονάδες 8

B4. Για $\kappa = 3$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Δίνεται ότι $\sqrt{1,4} \cong 1,18$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Α΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Γ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια επιχείρηση ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή.

Εάν το 50% των εργαζομένων έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 40 ετών και το 16% των εργαζομένων έχουν ηλικία μικρότερη των 35 ετών, να αποδείξετε ότι:

Γ1. Η μέση τιμή των ηλικιών των εργαζομένων είναι $\bar{x} = 40$.
Μονάδες 5

Γ2. Η τυπική απόκλιση είναι $s = 5$.
Μονάδες 10

Εάν οι εργαζόμενοι της επιχείρησης είναι 400, να βρείτε:

Γ3. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 45 ετών.
Μονάδες 5

Γ4. Πόσοι εργαζόμενοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη των 30 ετών και μικρότερη των 45 ετών.
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f .
Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2017$.
Μονάδες 6

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & Α' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Δ4. Εάν τα σημεία $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της $y = f''(x)$ και η τυπική απόκλιση των τετμημένων x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 των $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$ είναι ίση με 3, να βρείτε την τυπική απόκλιση των τεταγμένων y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 των σημείων $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$, $M_5(x_5, y_5)$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - Δ' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ - ΑΥΤΟΤΕΛΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ
& ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΣΥΝΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

(Μον. 3)

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i=1, 2, \dots, k$;

(Μον. 3)

γ. Να αποδείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$.

(Μον. 4)

Μονάδες 10

A2. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- β. $(\sin x)' = \eta \mu x$
- γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.
- δ. Η διακύμανση (s^2) είναι μέτρο διασποράς.
- ε. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί: 14, 12, 18, $4\alpha-1$, 16 με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- B1.** Αν η διάμεσος των παραπάνω αριθμών είναι ίση με 15, να υπολογίσετε την τιμή του α .

Μονάδες 7

- B2.** Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε τη διακύμανση (s^2) .

Μονάδες 7

- B3.** Για $\alpha=4$ να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω αριθμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

- B4.** Για $\alpha=4$ να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής των αριθμών που θα προκύψουν, αν ο καθένας από τους παραπάνω αριθμούς πολλαπλασιαστεί με το -2 και στη συνέχεια αυξηθεί κατά 5.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa, \quad \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Εάν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ .

Μονάδες 5

Γ2. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ γίνεται ελάχιστος.

Μονάδες 10

Γ3. Για $\kappa = 1$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 2018, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή του ακρότατου.

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 4)f'(x) - 2x}{x^2}$$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=(x)'=1$ για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

A2. α. Ποιες μεταβλητές λέγονται ποσοτικές; (μον. 3)

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται διακριτή και πότε συνεχής; (μον. 4)

Μονάδες 7

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

β. Ισχύει $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, όπου f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

δ. Σε κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, αν α_i συμβολίζει το τόξο του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη συχνότητα ν_i , τότε $\alpha_i = \frac{\nu}{\nu_i} \cdot 360^\circ$ για $i = 1, 2, \dots, \kappa$ και ν το μέγεθος του δείγματος.

ε. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, όπου l_1, l_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l_1 l_2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι τιμές ενός δείγματος είναι $11, 7, \kappa, 13, 11, 10$ όπου $\kappa > 0$. Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι $CV = 20\%$ και η διακύμανσή του είναι $s^2 = 4$.

B1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 5

B2. Αν $\bar{x} = 10$, να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ .

Μονάδες 7

B3. Αν $\kappa = 8$, να υπολογίσετε τη διάμεσο (δ) (μον. 4) και το εύρος (R) (μον. 2) του παραπάνω δείγματος.

Μονάδες 6

B4. Αν από κάθε τιμή του παραπάνω δείγματος αφαιρεθεί ο αριθμός 2, να εξετάσετε αν το δείγμα των νέων τιμών είναι ομοιογενές (μον. 5) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (μον. 2).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 10}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}.$

Μονάδες 3

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 5) και να δείξετε ότι $f(x) \geq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (μον. 6).

Μονάδες 11

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(5, f(5)).$

Μονάδες 6

Γ4. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της εφαπτομένης ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A (μον. 3) και B (μον. 2).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x, \quad \text{όπου } \lambda \in \mathbb{R} \text{ σταθερά.}$$

Δ1. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 4) και να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{3}{8}\right)$ και $f\left(\frac{5}{6}\right)$ (μον. 3).

Μονάδες 7

Δ2. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(\sqrt{x} - 1) \cdot (x^2 - x)}.$$

Μονάδες 7

Δ3. Για $\lambda = 3$ να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ για την οποία η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 18 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

β. Τα χαρακτηριστικά ως προς τα οποία εξετάζουμε έναν πληθυσμό λέγονται μεταβλητές και τις συμβολίζουμε συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο $f_i = \frac{v_i}{n}$, όπου v_i η συχνότητα της τιμής x_i και n το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 6

A3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε.

α. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots$

β. $(\sqrt{x})' = \dots$, με $x > 0$

γ. $(\sin x)' = \dots$

Μονάδες 9

- A4.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι $f'(x)=(x^2)'=2x$, για κάθε x στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές ενός σχολείου κατά τη διάρκεια των καλοκαιρινών διακοπών:

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
0				
1				70
2	10			90
3		10		100
Σύνολο		100		

Δίνεται ότι το 40% των μαθητών δεν διάβασαν κανένα βιβλίο.

- B1.** Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 12

- B2.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που έχουν διαβάσει τρία βιβλία;

Μονάδες 3

- B3.** Πόσοι μαθητές διάβασαν τουλάχιστον ένα βιβλίο;

Μονάδες 5

- B4.** Ποιο είναι το ποσοστό των μαθητών που διάβασαν το πολύ δύο βιβλία;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ σταθερά.

Γ1. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$.

Μονάδες 4

Γ2. Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις $f'(x)$ και $f''(x)$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των τοπικών ακροτάτων της.

Μονάδες 8

Γ4. Για $\lambda = 3$ να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 3}{f''(x)}.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)^{20}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι

$$f'(x) = 40(x^2 + 4x + 5)^{19} \cdot (x + 2).$$

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}.$$

Μονάδες 4

- Δ3.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, έχει εξίσωση $y = l$.

Μονάδες 8

- Δ4.** Θεωρούμε σημείο $A(x, l)$ της ευθείας $y = l$ με $x > 0$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης των σημείων $A(x, l)$ και $O(0, 0)$ ως προς x , όταν $x = l$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε **μόνον** τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ - ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$.

Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , όπου $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 4

A2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και c σταθερά, είναι ίση με το μηδέν, δηλαδή $f'(x) = (c)' = 0$.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Οι διακριτές μεταβλητές μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β) .

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α. $\left(\frac{1}{x}\right)' = \dots\dots\dots$, με $x \neq 0$.

β. $(x^v)' = \dots\dots\dots$, όπου v φυσικός αριθμός.

γ. $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$, όπου $c \in \mathbb{R}$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \alpha x + 2$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά και $x \in \mathbb{R}$.

B1. Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη ίση με 1, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

B2. Για $\alpha = 3$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

B3. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

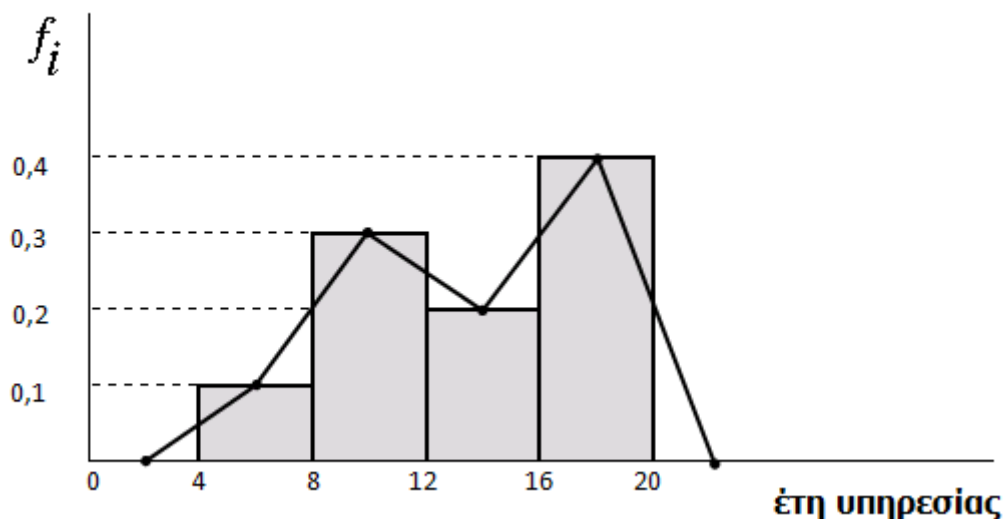
Μονάδες 7

B4. Για $\alpha = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το παρακάτω ιστόγραμμα και το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων f_i που αφορούν τα έτη υπηρεσίας 50 εκπαιδευτικών.



Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που ακολουθεί και να τον συμπληρώσετε με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα,

Έτη υπηρεσίας [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	a_i
[4,8)		5		36°
[8,12)				
[12,16)	14			
[16,20)		20		144°
Σύνολο		50		360°

όπου a_i το αντίστοιχο τόξο ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων.

Μονάδες 12

Γ2. Πόσοι εκπαιδευτικοί έχουν συμπληρώσει τουλάχιστον 8 έτη υπηρεσίας;

Μονάδες 5

Γ3. Να βρείτε το ποσοστό των εκπαιδευτικών που έχουν συμπληρώσει υπηρεσία λιγότερη από 16 έτη.

Μονάδες 5

Γ4. Πόσο είναι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα;

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Δ

Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος x μέτρα (m), πλάτος y μέτρα (m) και περίμετρο 80m.

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $E(x) = -x^2 + 40x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

Μονάδες 10

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $E(x)$ ως προς τη μονοτονία της.

Μονάδες 6

Δ3. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο και ποια είναι η μέγιστη τιμή του;

Μονάδες 4

Δ4. Δύο οικόπεδα Α και Β σχήματος ορθογωνίου με περίμετρο 80m το καθένα έχουν μήκη $x_A = 29,5\text{m}$ και $x_B = 34,2\text{m}$, αντίστοιχα. Να απαντήσετε αιτιολογημένα ποιο από τα δύο οικόπεδα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = 2x$.

Μονάδες 7

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο συντελεστής μεταβολής δεν είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης.

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

γ. Ο σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 6

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπείς ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(\sqrt{x})' = \dots$

β. $(f(g(x)))' = \dots$

Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Β

Κατά τον μήνα Νοέμβριο οι απουσίες πέντε (5) μαθητών ήταν:
25, 10, 5, 20, 15.

B1. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ (μον.4) και το εύρος (μον. 3) του παραπάνω δείγματος των πέντε μαθητών.

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 7

B3. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος (μον. 6) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές απαντώντας αιτιολογημένα (μον. 5).

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + \alpha x + 1$, όπου $x, \alpha \in \mathbb{R}$.

Γ1. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 1$ είναι ίσος με 0, να δείξετε ότι $\alpha = 15$.

Μονάδες 6

Γ2. Για $\alpha = 15$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Μονάδες 6

Γ3. Για $\alpha = 15$ να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και τα ακρότατα (μον. 2).

Μονάδες 8

Γ4. Για $\alpha = 15$ να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

- Δ1.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης (μον. 2) και να υπολογίσετε την παράγωγο $f'(x)$ (μον. 4).

Μονάδες 6

- Δ2.** Υποθέτουμε ότι ο χρόνος επιστροφής, σε λεπτά, από το σχολείο στο σπίτι για τους μαθητές μίας περιφέρειας ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή και τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = \frac{1}{f'(2)} \quad , \quad s = \frac{1}{2f'(1)}$$

αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $\bar{x} = 9$ και $s = 2$.

Μονάδες 6

- Δ3.** Αν το πλήθος των μαθητών της περιφέρειας είναι 2000, πόσοι από αυτούς έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά (μον. 6) και πόσοι πάνω από 15 λεπτά (μον. 3);

Μονάδες 9

- Δ4.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση, στην περίπτωση που ο χρόνος επιστροφής των μαθητών της περιφέρειας αυξηθεί κατά 3 λεπτά.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$, όπου c πραγματικός αριθμός, ισούται με $cf'(x)$.

Μονάδες 10

A2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i με $i = 1, 2, \dots, k$ μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές.

β. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

γ. Αν η καμπύλη συχνοτήτων είναι κανονική ή περίπου κανονική, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s , τότε το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$.

δ. $(\sqrt{x})' = \frac{2}{\sqrt{x}}, x > 0$

ε. Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 12x + 10$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να υπολογίσετε το α .

Μονάδες 6

B3. Για $\alpha = 3$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων.

Μονάδες 9

B4. Για $\alpha = 3$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ρωτήθηκαν οι μαθητές/τριες της Γ' τάξης ενός ΕΠΑΛ πόσες ώρες διέθεσαν στα μέσα κοινωνικής δικτύωσης την προηγούμενη εβδομάδα. Οι απαντήσεις τους ομαδοποιήθηκαν όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i \nu_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)		ν_3	
[20,24)		5	
	Σύνολο		

Δίνεται ότι ο μέσος χρόνος είναι $\bar{x} = 14$.

Γ1. Να δείξετε ότι $v_3 = 10$.

Μονάδες 8

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV. Είναι το δείγμα ομοιογενές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-4, -1]$ ισχύει:

$$-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$$

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $\Gamma(x_3, y_3)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_1, x_2, x_3 να έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 4$ και τυπική απόκλιση $s_x = 2$, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV των τεταγμένων y_1, y_2, y_3 .

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σε ένα σύνολο A , να αποδείξετε ότι: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 10

A2. α) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Τι ονομάζεται συχνότητα n_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i , $i = 1, 2, \dots, k$;

Μονάδες 3

β) Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ οι τιμές μίας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και $w_1, w_2, \dots, w_n$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας). Να γράψετε τον τύπο του σταθμικού μέσου.

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.

β. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

γ. Ισχύει $(\eta \mu x)' = \sigma \nu x$

δ. Οι ποσοτικές μεταβλητές, των οποίων οι τιμές είναι αριθμοί, διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Το πρωί μίας ημέρας οι τιμές της θερμοκρασίας (σε °C) σε 5 πόλεις της Ελλάδας ήταν: 22, 18, $20 + \kappa$, 14, 16, όπου κ πραγματικός αριθμός.

Ο συντελεστής μεταβολής των παραπάνω τιμών είναι $CV = 20\%$ και η τυπική απόκλιση είναι ίση με $s = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $s = 4$.

Μονάδες 6

Γ2. Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω τιμών της θερμοκρασίας είναι $\bar{x} = 20$.

Μονάδες 4

Γ3. Να δείξετε ότι $\kappa = 10$ (μον. 6) και να βρείτε τη διάμεσο δ (μον. 3).

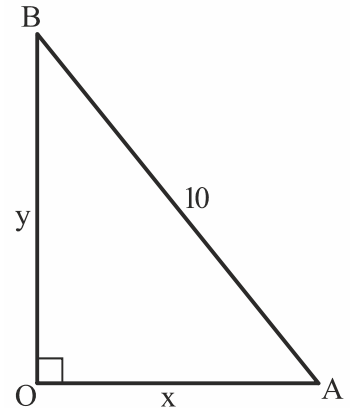
Μονάδες 9

Γ4. Αν το μεσημέρι της ίδιας ημέρας οι παραπάνω τιμές της θερμοκρασίας αυξήθηκαν κατά 10%, να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής των νέων τιμών της θερμοκρασίας.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο AOB με $\widehat{O} = 90^\circ$, κάθετες πλευρές μήκους $(OA) = x$, $(OB) = y$ και υποτείνουσα μήκους $(AB) = 10$.



- Δ1.** Να δείξετε ότι η πλευρά y εκφράζεται ως συνάρτηση του x από τον τύπο: $y = f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ (μον. 3) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (μον. 4).

Μονάδες 7

- Δ2.** Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$, ως προς x , όταν $x = 8$.

Μονάδες 6

- Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6}$.

Μονάδες 6

- Δ4.** Αν $x_1 = 2,3$, $x_2 = 3,5$ και $x_3 = 2,8$ είναι τιμές της πλευράς x , να αιτιολογήσετε ότι: $f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_n$ οι παρατηρήσεις μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$. Αν αφαιρέσουμε τη μέση τιμή $\bar{x}$ από κάθε παρατήρηση, να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών αυτών είναι ίσος με 0.

Μονάδες 7

A2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Η διακύμανση των παρατηρήσεων ενός δείγματος εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες μέτρησης με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις του δείγματος.
- β.** Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς.
- γ.** Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς το x , όταν $x = x_0$.
- δ.** Αν f παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ , τότε ισχύει $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$.
- ε.** Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 10

A4. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ελλειπίες ισότητες και να τις συμπληρώσετε σωστά:

α. $(c)' = \dots$

β. $(x^2)' = \dots$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πλήθος των ωρών που εργάζονται υπερωριακά 50 υπάλληλοι σε μία επιχείρηση κατά τη διάρκεια ενός μήνα.

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i
0	...	...	...
1	15	...	...
2	11	...	...
3	8	...	...
4	6	...	50
Σύνολο	50	100	

B1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να συμπληρώσετε τα κενά.

Μονάδες 10

B2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του δείγματος.

Μονάδες 5

B3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ του δείγματος.

Μονάδες 4

B4. α) Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες. (μον. 3)

β) Αν αυξηθούν οι υπερωρίες κατά 4 ώρες σε κάθε υπάλληλο, να βρείτε τη νέα μέση τιμή. (μον. 3)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και α σταθερός πραγματικός αριθμός.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων της f ως συνάρτηση του α (μον. 4) και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α , αν το ημιάθροισμα των τιμών των ακροτάτων της f είναι -8 . (μον. 4)

Μονάδες 8

Γ3. Για $\alpha = -12$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Μονάδες 6

Γ4. Για $\alpha = -12$, να δείξετε ότι $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ για κάθε $x \in [2, +\infty)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ με $x \in \mathbb{R}$ και λ σταθερός πραγματικός αριθμός.

Δ1. Αν ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0$, να βρεθεί ο αριθμός λ .

Μονάδες 4

Δ2. Για $\lambda = -4$, να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\lambda = -4$, να προσδιοριστεί το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)}$$

Μονάδες 7

Δ4. Για $\lambda = -4$, να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω $x_1, x_2, \dots, x_k$ οι τιμές μίας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n , όπου k, n μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq n$. Για τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$$

Μονάδες 6

- A2.** Να διατυπώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

- A3.** Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και B το σύνολο των $x \in A$, στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η συνάρτηση της πρώτης παραγώγου της f ;

Μονάδες 5

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α.** Το εύρος θεωρείται αξιόπιστο μέτρο διασποράς.
- β.** Αν για μία συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) μέγιστο στη θέση $x = x_0$.
- γ.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποιοτικής μεταβλητής.

δ. Αν $g(x) \neq 0$ τότε $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

- ε. Σε ένα ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος n του δείγματος.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad \text{όπου } x \in \mathbb{R}$$

- B1.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 4

- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μον. 6) και να βρείτε το είδος και την τιμή των ακροτάτων (μον. 4).

Μονάδες 10

- B3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Μονάδες 6

- B4.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x + 1}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν επτά μαθητές στις θερινές διακοπές είναι αντίστοιχα:

$$4, 5, 4, \kappa, 0, 3, 7 \quad \text{όπου } \kappa \text{ φυσικός αριθμός.}$$

- Γ1.** Αν ο μέσος αριθμός βιβλίων που διάβασαν οι μαθητές είναι $\bar{x} = 4$, να βρείτε τον κ .

Μονάδες 5

Για $\kappa = 5$:

Γ2. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 του δείγματος.

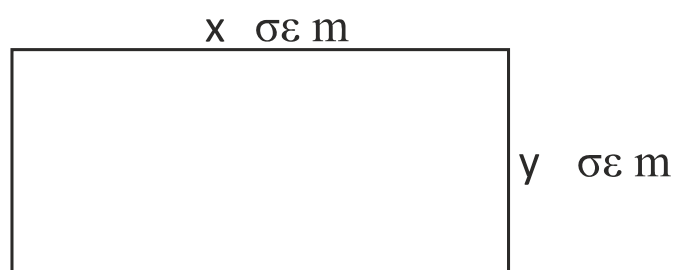
Μονάδες 10

Γ4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, εμβαδού 100 m^2 .



Δ1. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του οικοπέδου, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Μονάδες 5

Δ2. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $\Pi(x)$ (μον. 5) και να αποδείξετε ότι το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο (μον. 3).

Μονάδες 8

Δ3. Αν x_1, x_2 είναι τιμές της πλευράς του παραπάνω ορθογωνίου με $x_1, x_2 \in (0,10)$ και $x_1 < x_2$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2}$$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10}$$

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ