ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΔΕΥΤΕΡΑ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1o**

**A1.** Aν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α (x0, f(x0)).

Mονάδες 4

**Α2.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

**Β1.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

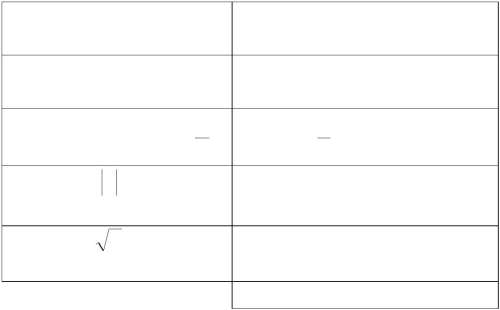
**α.** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x0, τότε η f΄ είναι πάντοτε συνεχής στο x0.

**β.** Αν η f δεν είναι συνεχής στο x0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x0.

**γ.** Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x0,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x0.

Μονάδες 4,5

**Β2.** *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x0.*



Στήλη Α συναρτήσεις

α. f(x)=3x3, x0=1

Στήλη Β εφαπτόμενες

1. y=-2x+π

β. f(x)=ημ2x, x = π

0

2

2. y= 1 x+1

γ. f(x)=3 x ,

x0=0

4

3. y=9x-6

δ. f(x)= x,

x0=4

4. y=-9x+5

5. δεν υπάρχει

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f(z)= όπου ~~z~~ o συζυγής του z.

image42z + i ~~z~~ - 2i

Μονάδες 8

,zÎ C μεz ¹ -2i,

**α.** Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

w1=f(9-5i) Μονάδες 6

image5é 2 f(9- 5i)ù 2004

image6w2 = ê 3 ú

Moνάδες 6

ë û

**β.** Θεωρούμε τον πίνακα M =

2 éw1 0 ù

image12image11image10image93 ê 0 - w ú



ë û

1

όπου image13w1 image14 το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w1

του ερωτήματος **α**.

*Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.*

Ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ με πίνακα Μ είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο

image15και γωνία θ = π

4

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα y΄y Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία y=x

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων

Ο και λόγο λ = 2 .



3

Μονάδες 5

**γ.** Αν Μ ο πίνακας του ερωτήματος **β**, τότε να βρεθεί ο πίνακας Χ ώστε να ισχύει:

ΜΧ=Κ

όπου Κ είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο

image18την αρχή των αξόνων Ο και γωνία θ = π.

2

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3ο**

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει f΄(x)>0 για κάθε x(0,1). Aν f(0)=2 και f(1)=4, να δείξετε ότι:

**α.** η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη x0Î (0,1).

Μονάδες 7

**β.** υπάρχει x1Î (0,1), τέτοιο ώστε

f(x

1)=

f (1/ 5) + f(2/ 5) + f (3/ 5) + f(4/ 5)

image19

4

Μονάδες 12

**γ.** υπάρχει x2Î (0,1), ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(x2,f(x2)) να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 4ο**

Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

f(t)=

αt

image21æt ö2

image201 + ç ÷

β

è ø

,t³ 0

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και

επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

**α.** Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

Μονάδες 15

**β.** Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2000**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ TEXΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

Α.

α) Πότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός ονομάζεται γραμμικός;

Μονάδες 2,5

β)Αν Μ(x, y) σημείο του επιπέδου, u→

(α, β) δεδομένο διάνυσμα και

Μ΄( x΄, y΄) η εικόνα του Μ στην παράλληλη μεταφορά κατά το διάνυσμα u→ ,

να βρείτε τα x΄,y΄ συναρτήσει των συντεταγμένων του σημείου Μ και του

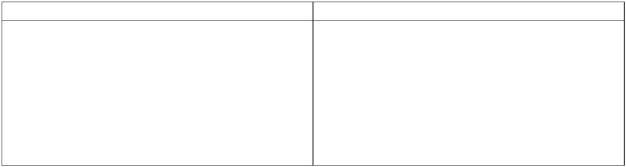
διανύσματος u→ .

Μονάδες 5

γ)Είναι η παράλληλη μεταφορά γραμμικός μετασχηματισμός; Nα δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Β1.Να γράψετε στο τετράδιό σας το μετασχηματισμό της στήλης I και δίπλα τον αριθμό της στήλης ιι που αντιστοιχεί στον πίνακα του μετασχηματισμού.



Στήλη ι

Τ 1 : «συμμετρία ως προς τον άξονα x΄x»

Στήλη ιι

1.

1

1

1 1

Τ : «στροφή κατά γωνία

2

π/2»

2.

3.

0 1

1 0

1 0

0 1

Μονάδες 3

Β2.Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό Τ με πίνακα Α = Α1 Α2 - Α2 Α1,

όπου Α1 , Α 2 οι πίνακες των μετασχηματισμών Τ 1 , Τ 2 αντιστοίχως, του ερωτήματος Β1.

α)Να δείξετε ότι ο Τ είναι κανονικός μετασχηματισμός.

Μονάδες 4,5

β)Να βρείτε την εικόνα της ευθείας ε: 2 x - y + 5 = 0 μέσω του μετασχηματισμού Τ.

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z

5 i

2 3i



α) Να γράψετε τον z στη μορφή α + βi, α,β R.

β) Να γράψετε τον z στην τριγωνομετρική του μορφή.

Μονάδες 4

Μονάδες 5

Στις ερωτήσεις γ), δ) να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό του θέματος και της κάθε ερώτησης και δίπλα να σημειώσετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

γ) Αν θ = Argz, τότε ο μιγαδικός αριθμός iz έχει όρισμα:

image26image24Α. π - θ Β. π θ Γ. θ - π Δ. π + θ



4 2 2

δ) Το z4 είναι ίσο με:

Α. 4 Β. 4i Γ. - 4i Δ. - 4

Μονάδες 3

Μονάδες 3

Β. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου, που είναι εικόνες των μιγαδικών z, για τους οποίους ισχύει:

1 .



z - 1

z - i

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με:

x2 - 8x 16 , 0 x 5



f(x)

(α2 β2 ) ln(x - 5 e) 2(α 1) e5-x, x 5

Α. Να βρεθούν τα, lim f(x) , lim f(x) .



5



5

x x

Μονάδες 6

Β. Να βρεθούν τα α, β R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x0 = 5.

Μονάδες 10

Γ. Για τις τιμές των α,β του ερωτήματος Β να βρείτε το lim f(x) .



x

Mονάδες 9

image29

**ΘΕΜΑ 4ο**

Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου t 0 . Αν ο ρυθμός μεταβολής



8

t 1

της f(t) είναι - 2

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).

Μονάδες 6

β)Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

Μονάδες 6

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται ln 11 2,4).

Μονάδες 13

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

image30

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1o**

* 1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z1, z2. Να αποδείξετε

ότι: çz1

×z2ç = çz1ç ×çz2ç.

Μονάδες 7,5

**Α.2.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

image33image32image31**α.** z2 = zz

**β. image34**z2 image35= z2

**γ. image36**z image37 = -



z

**δ. image39**z image40 =



z

image45image44image43image42**ε.** i z = z

Μονάδες 5

image46**Β.1.** Αν z1 = 3 + 4 i και z2 = 1 - 3i, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να

προκύπτει ισότητα.



**Στήλη Α**

**Στήλη Β**

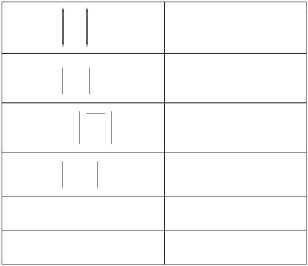
**1.**

z1×z2

**α.**

4

Μονάδες 7,5



**2.**

z2

1

**β.**

2

**3.**

z2 2

**γ.** 25

**4.**

- z1

**δ.** –5

**5.**

i z2

**ε.** –2

**στ.** 5

**ζ.** 10

image52image51**Β.2.** Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει z = 1, να δείξετε

image54image53ότι z = 1 .

z

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

ì αx2, x £ 3

f(x) = ï

í 1 -ex-3

image55ï

, x > 3

î x - 3

**α.** Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

Μονάδες 9

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης Cf της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

Μονάδες 7

**γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 3ο**

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμώνΙR, ισχύει ότι:

f3(x) + β f2(x) + γ f(x) = x3

– 2x2

+ 6x –1 για κάθε xÎΙR,

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με β 2 < 3γ.

**α.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

**β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

**γ.** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

#### ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμώνΙR, για την οποία ισχύoυν οι σχέσεις:

* + 1. f(x) ¹ 0, για κάθε xÎ ΙR

ò1

* + 1. f(x) = 1 - 2 x 2 0 t f 2(xt) dt , για κάθε x ÎΙR.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

g(x) =

1

image56

f(x)

-x2 , για κάθε xÎΙR.

**α.** Να δείξετε ότι ισχύει f¢(x) = - 2xf2(x)

Μονάδες 10

**β.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

**γ.** Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

f(x) =

1 .

image571 + x2

Μονάδες 4

**δ.** Να βρείτε το όριο lim (x f(x) ημ2x).

x® +¥

Μονάδες 7

image59image58ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**ΘΕΜΑ 1o**

**A.** Έστω f μια συνεχής

συνάρτηση σ' ένα

διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια

παράγουσα

της f

στο [α, β], τότε να

δείξετε ότι

β

òα

f (t) dt = G(β) - G(α) .

#### Μονάδες 12

**Β.1.**Έστω η

συνάρτηση

f(x) = ημx. Να δείξετε

ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο ΙR και ισχύει

f΄(x) =

συνx .

#### Μονάδες 8

**Β.2.***Να*

##### χαρακτηρίσετε τις προτάσεις

*που*

##### ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας

*την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο*

##### γράμμα

*που*

##### αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν η

συνάρτηση

f είναι ορισμένη στο

[α,β] και

συνεχής

στο (α,β], τότε η f

παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή.

#### Μονάδα 1

**β.** Κάθε

συνάρτηση,

που

είναι 1-1 στο

πεδίο

ορισμού της, είναι γνησίως

μονότονη.

**γ.** Αν

υπάρχει

#### Μονάδα 1

το όριο της συνάρτησης f

στο x0 και lim image60f(x) image61=0, τότε

x® x0

lim f(x) = 0. x® x0

#### Μονάδα 1

**δ.** Αν η

συνάρτηση

f είναι παραγωγίσιμη

στο ΙR , τότε

òf (x)dx = xf (x) -

òxf΄(x)dx .

#### Μονάδα 1

**ε.** Αν lim f(x) > 0, τότε f(x) > 0

x® x0

κοντά στο x0 .

#### Μονάδα 1

**ΘΕΜΑ 2ο**

Έστω z ένας μιγαδικός αριθμός και f(ν) = iν z, ν Î IN\*.

**α.** Να δείξετε ότι f(3) + f(8) + f(13) + f(18)

= 0 .

#### Μονάδες 7

**β.** Αν ½z½= ρ και Arg(z) = θ, να δείξετε ότι

f(13) = ρ

é æπ

image62

θö÷+

æπ öù .

image63

êσυνç2 + iημç + θ÷ú

ë è ø è 2 øû

#### Μονάδες 8

π

image64**γ.** Αν ½z½= 2 και Arg(z) = , να βρεθεί το

3

εμβαδόν

του

τριγώνου

με κορυφές

τα σημεία

του

μιγαδικού

επιπέδου

που είναι εικόνες

των μιγαδικών αριθμών 0, z και f(13).

#### Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το ΙR .

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog

είναι 1-1.

**α.** Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

**β.** Να δείξετε ότι η εξίσωση:

#### Μονάδες 7

g(f(x) + x3 - x) = g(f(x) + 2x -1)

ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίέζχαε.ι

#### Μονάδες 18

**ΘΕΜΑ 4ο**

**α.** Έστω δύο β].

συναρτήσεις

h, g συνεχείς στο [α,

Να αποδείξετε ότι αν h(x) > g(x) για κάθε x Î [α, β], τότε και

β β

òα h(x)dx > òα g(x)dx .

#### Μονάδες 2

**β.** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο ΙR συνάρτηση f,

που ικανοποιεί τις σχέσεις:

f (x) - e- f (x) =x- 1, x Î ΙR και f(0) = 0 .

**ι)** Να εκφραστεί η f΄ ως

συνάρτηση

της f.

#### Μονάδες 5

**ιι)** Να δείξετε ότι κάθε x > 0.

x < f(x) < x f΄(x) , για

image652

#### Μονάδες 12

**ιιι)** Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της

f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x΄x, να δείξετε ότι

image67image661 < E < 1 f (1) .

4 2

#### Μονάδες 6

image68

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

#### ΘΕΜΑ 1o

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

#### Μονάδες 8

**Β.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 7**

**Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

\_

image75image74image73**α.** Αν z ένας μιγαδικός αριθμός και z ο συζυγής του,



z

image70image69τότε ισχύει z =

= - z .

**Μονάδες 2**

**β.** Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ

και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

Αν f΄΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

#### Μονάδες 2

**γ.** Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ, ισχύει

òf ΄(x)dx =f(x) +c , c IR.

#### Μονάδες 2

**δ.** Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.

#### Μονάδες 2

**ε.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x0 και f΄(x0)=0, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x0.

#### Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z=α+βi, όπου α,β IR

\_ \_

και w=3z – i z +4, όπου z είναι ο συζυγής του z.

**α.** Να αποδείξετε ότι Re(w)=3α–β+4

Ιm(w)=3β–α.

#### Μονάδες 6

**β.** Να αποδείξετε ότι, αν οι εικόνες του w στο μιγαδικό επίπεδο κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–12, τότε οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2.

#### Μονάδες 9

**γ.** Να βρείτε ποιος από τους μιγαδικούς αριθμούς z, οι εικόνες των οποίων κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x–2, έχει το ελάχιστο μέτρο.

#### Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω η συνάρτηση

f(x) = x5+x3+x .

**α.** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

**Μονάδες 6**

**β.** Να αποδείξετε ότι f(ex)≥f(1+x) για κάθε xÎ IR.

#### Μονάδες 6

**γ.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f **–**1.

#### Μονάδες 5

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f **–**1, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3.

#### Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ(α,β), δ (α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

**α.** Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).

**β.** Υπάρχουν σημεία ξ1, ξ2

και f΄΄(ξ2)>0.

#### Μονάδες 8

Î (α,β) τέτοια ώστε f΄΄(ξ1)<0

#### Μονάδες 9

**γ.** Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

**Μονάδες 8**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ **27** ΜΑΪΟΥ **2004**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ**:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ**: TE**ΣΣΕΡΙΣ **(4)**

ΘΕΜΑ **1o**

1. Έστω µια συνάρτηση f ορισµένη σ' ένα διάστηµα ∆ και x0 ένα εσωτερικό σηµείο του ∆. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x0 και είναι παραγωγίσιµη στο σηµείο αυτό, να αποδείξετε ότι f΄(x0 )=0

Μονάδες **10**

Β**.** Πότε µια συνάρτηση f λέµε ότι είναι παραγωγίσιµη σε ένα σηµείο x0 του πεδίου ορισµού της;

Μονάδες **5**

Γ**.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράµµα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α**.** Η διανυσµατική ακτίνα του αθροίσµατος δύο µιγαδικών αριθµών είναι το άθροισµα των διανυσµατικών ακτίνων τους.

Μονάδες **2**

β**.** lim f(x) = A , αν και µόνο αν lim f(x) = lim f(x) = A

0

x→x0 x→x−

0

x→x+

Μονάδες **2**

γ**.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιµες στο x0 , τότε η συνάρτηση f⋅g είναι παραγωγίσιµη στο x0 και ισχύει:

(f⋅g)΄(x0) = f΄(x0) g΄(x0)

Μονάδες **2**

δ**.** Έστω µια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστηµα ∆. Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σηµείο x του ∆, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το ∆.

Μονάδες **2**

ε**.** Έστω f µια συνεχής συνάρτηση σ’ ένα διάστηµα [α,β]. Αν G είναι µια παράγουσα της f στο [α,β], τότε

β

ΘΕΜΑ **2**ο

∫ α f(t)dt = G(β) − G(α)

Μονάδες **2**

∆ίνεται η συνάρτηση f µε τύπο f(x)=x2 lnx .

α**.** Να βρείτε το πεδίο ορισµού της συνάρτησης f, να

µελετήσετε την µονοτονία της ακρότατα.

και να βρείτε τα

Μονάδες **10**

β**.** Να µελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σηµεία καµπής.

γ**.** Να βρείτε το σύνολο τιµών της f.

Μονάδες **8**

Μονάδες **7**

ΘΕΜΑ **3**ο

∆ίνεται η συνάρτηση g(x)=exf(x), όπου f συνάρτηση

παραγωγίσιµη στο IR και f(0)=f(

3 )=0 .

2

α**.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστο ξ∈(0, 3 )

2

τέτοιο ώστε f΄(ξ)=−f(ξ).

Μονάδες **8**

β**.** Εάν f(x)=2x2 −3x, να υπολογίσετε το ολοκλήρωµα

I(α)= ∫ α

0

g(x)dx , α∈IR

Μονάδες **8**

γ**.** Να βρείτε το όριο lim I(α)

α→-∞

Μονάδες **9**

ΘΕΜΑ **4**ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: IR →IR τέτοια ώστε f(1)=1. Αν για κάθε x∈IR,ισχύει

3



1

z f(t)dt − 3 z + z

x

g(x)= ∫1

όπου z=α+βi∈C, µε α, β∈IR\*, τότε:

(x− 1) ≥ 0,

α**.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιµη στοIR και να βρείτε τη g΄.

Μονάδες **5**

β**.** Nα αποδείξετε ότι



z = z + 1

z

Μονάδες **8**

image84γ**.** Με δεδοµένη τη σχέση του ερωτήµατος β να αποδείξετε ότι Re(z2 ) = − 1

2

Μονάδες **6**

δ**.** Aν επιπλέον f(2)=α>0, f(3)=β και α>β, να αποδείξετε ότι

υπάρχει x0

∈ (2,3) τέτοιο ώστε f(x0)=0.

Μονάδες **6**

Ο∆ΗΓΙΕΣ **(**για τους εξεταζο**µ**ένους**)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε µόνο τα προκαταρκτικά (ηµεροµηνία, κατεύθυνση, εξεταζόµενο µάθηµα). Να µην αντιγράψετε τα θέµατα στο τετράδιο. Τα σχήµατα που θα χρησιµοποιήσετε στο τετράδιο µπορούν να γίνουν και µε µολύβι.
2. Να γράψετε το ονοµατεπώνυµό σας στο πάνω µέρος των φωτοαντιγράφων, αµέσως µόλις σας παραδοθούν. Καµιά άλλη σηµείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε µαζί µε το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν µετά το πέρας της εξέτασης.

1. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέµατα.
2. Κάθε λύση επιστηµονικά τεκµηριωµένη είναι αποδεκτή. 5. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες µετά τη διανοµή των

φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: µετά τη 10:30΄ πρωινή.

**K**ΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

### ΘΕΜΑ 1o

* 1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

 η f είναι συνεχής στο [α, β] και

 f(α)  f(β)

δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β)

υπάρχει ένας, τουλάχιστον x0  (α, β) τέτοιος, ώστε

f(x0 ) = **η** .

### Μονάδες 9

**Α.2** Πότε η ευθεία y = λx + β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +;

### Μονάδες 4

1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] με f(α) < 0 και υπάρχει ξ  (α, β) ώστε f(ξ) = 0, τότε κατ’ ανάγκη f(β) > 0.

### Μονάδες 2

**β.** Αν υπάρχει το lim f(x)  g(x)  , τότε κατ’ ανάγκη

x x

0

υπάρχουν τα lim f(x) και lim g(x) .

x x0 x x0

### Μονάδες 2

**γ.** Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f–1 και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη

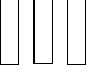
γραφική παράσταση της f–1 .

### Μονάδες 2

**δ.** Αν lim f(x)  0 και f(x) > 0 κοντά στο x

x x 0

0, τότε

image91lim 1 .

x x f0 (x)

### Μονάδες 2

**ε.** Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα ∆ και α είναι ένα σημείο του ∆, τότε



ισχύει

xf(t)dt f(x) - f(α) για κάθε x ∆.

### Μονάδες 2

α

**στ.** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα

∆ και δε μηδενίζεται σ’ αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε x  ∆ ή είναι αρνητική για κάθε x  ∆, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα ∆.

### Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

∆ίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z1, z2, z3



z1 9

z1

με z

1= z =2z =

33.

**α.** ∆είξτε ότι: .

**β.** ∆είξτε ότι ο αριθμός

### Μονάδες 7

είναι πραγματικός .



z1 z2

z2

z1

### Μονάδες 9

**γ.** ∆είξτε ότι: z

1+ z

2+ z 3 =

1 z 1· z 3

2+ z

2 · z

3+ z

3 · z 1 .

### image94Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 3ο**

∆ίνεται η συνάρτηση f με τύπο f(x) = eλx,

**α.** ∆είξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

λ > 0.

### Μονάδες 3

**β.** ∆είξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η y = λex.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

### Μονάδες 7

**γ.** ∆είξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι

Ε(λ) =

e - 2 .

image972λ

λ2  Ε(λ)

### Μονάδες 8

**δ.** Υπολογίστε το lim .



ημλ

λ 2

### Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στοIR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση 2 f΄(x) = ex – f( x) για κάθε x IR και f(0) = 0.

**α.** Να δειχθεί ότι: f(x)  ln



1

e x

2

.

**β.** Nα βρεθεί το: lim .



x

0

f(x - t) dt

x 0 ημx

### Μονάδες 6

**Μονάδες 6**

**γ.** ∆ίδονται οι συναρτήσεις:

h(x) **=**

x 2005

 f(t)dt και g(x) =

x2007

.

image103

– x t

2007

∆είξτε ότι h(x) = g(x) για κάθε x IR .

### Μονάδες 7

**δ.** ∆είξτε ότι η εξίσωση

x 2005

f(t)dt 1

image104

έχει ακριβώς

μία λύση στο (0 , 1).

– x t

2008

### Μονάδες 6

**Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
2. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
4. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη **10:30΄** πρωινή.

### KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006**

### ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1o**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα ∆.

Να αποδείξετε ότι:

 Αν f΄(x)>0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του ∆, τότε η

f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το ∆.

 Αν f΄(x)<0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του ∆, τότε η

f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το ∆.

### Μονάδες 10

**Α.2** ΄Εστω μια συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα ∆ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του ∆. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο ∆;

### Μονάδες 5

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

2  z2 .

### Μονάδες 2



z

**β.** Αν υπάρχει το lximx0 f(x)  0,

στο x0 .

τότε f (x)  0 κοντά

### Μονάδες 2

**γ.** H εικόνα f(∆) ενός διαστήματος ∆ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

### Μονάδες 2

**δ.** Ισχύει ο τύπος (3x )΄ x  3x -1 , για κάθε x IR.

### Μονάδες 2

**ε.** Ισχύει η σχέση

 f (x)g΄(x)dx=[f(x)g(x)] β βf ΄(x)g(x)dx, όπου f΄,g΄

β α

α

είναι συνεχείς συναρτήσειςαστο [α,β].

### Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) =2+(x-2)2 με x≥2.

**α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

### Μονάδες 6

**β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f**- 1**

της f και να βρείτε τον τύπο της.

### Μονάδες 8

**γ. i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών

παραστάσεων των συναρτήσεων f και f**-1** με την ευθεία y=x.

### Μονάδες 4

**ii.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f**-1**.

### Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 3ο**

∆ίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z1 , z2 , z3

με z1



z 2 z 3 1

και z1 z 2 z 3 0 .

**α.** Να αποδείξετε ότι:



z1 z 2 z 3 z 1 z 2z . 3

### i.

**Μονάδες 9**

### ii.

2  4 και Re (z z ) 1 .

1 2



z1 z2

### Μονάδες 8

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z1,z2,z3 στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

### ΘΕΜΑ 4ο



x 1

x 1

∆ίνεται η συνάρτηση f(x)=

lnx.

### Μονάδες 8

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

### Μονάδες 8

**β.** Nα αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5 γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g(x)=lnx στο σημείο Α(α,lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

h(x)=ex στο σημείο Β(β,eβ) με β IR ταυτίζονται, τότε να

δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0.

**Μονάδες 9 δ.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές

εφαπτόμενες.

### Μονάδες 3

**Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
2. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
3. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
4. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

### KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007**

### ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ 1o**

**A.1** Αν z1

, z2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:



z1 z2 z 1 z 2 .

**Α.2** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

### Μονάδες 8

**Μονάδες 4**

**Α.3** Πότε η ευθεία y = A λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +;

### Μονάδες 3

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α,β] και για κάθε x [α, β] ισχύει f(x) 0 τότε  fα(x) dx 0 .

β

### Μονάδες 2

**β.** Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα ∆ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του

∆. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο ∆ τότε f(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του ∆.

### Μονάδες 2

**γ.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x0 , τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x0.

### Μονάδες 2

**δ.** Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα ∆ και α είναι ένα σημείο του ∆, τότε



g(x)

α

f(t) dt f g(x) g (x)

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

**ε.** Αν α > 1 τότε lim αx  0 .

x –

### Μονάδες 2

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2ο

∆ίνεται ο μιγαδικός αριθμός



2 αi

α 2i

z  με αIR.

**α.** Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ =1.

**β.** Έστω z1, z2

### Μονάδες 9

οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

z 



2 αi

α 2i

για α = 0 και α = 2 αντίστοιχα.

1. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών

αριθμών z1

και z2.

### Μονάδες 8

1. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

(z1)2ν (– z 2) ν

για κάθε φυσικό αριθμό ν.

### Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3ο**

∆ίνεται η συνάρτηση:

f(x) = x3

– 3x – 2ημ2θ

όπου θIR μια σταθερά με θ  κπ +

π, κ Z.

image1202

**α.** Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο,

ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

### Μονάδες 7

**β.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

### Μονάδες 8

**γ.** Αν x1, x2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x

η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα3

σημεία

1 1 2 2

Α(x , f(x )), B(x , f(x )) 2

και

3 3

Γ(x , f(x ))

βρίσκονται στην ευθεία y = –2x –2ημ θ.

### Μονάδες 3

**δ.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία y = –2x –2ημ2 θ.

### Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει f(0) > 0. ∆ίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα [0, 1] για την οποία ισχύει g(x) > 0 για κάθε x [0, 1].

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

F(x) =

0

x f(t) g(t) dt , x [0, 1],

G(x) =

x

0 g(t) dt ,

x [0,1].

**α.** Να δειχθεί ότι F(x) > 0 για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

### Μονάδες 8

**β.** Nα αποδειχθεί ότι:

f(x) G(x) > F(x)

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

**γ.** Nα αποδειχθεί ότι ισχύει:

F(x) F(1)



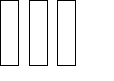
G(x) G(1)

για κάθε x στο διάστημα (0, 1].

### Μονάδες 6

**Μονάδες 4**

**δ.** Να βρεθεί το όριο:



0

f(t) g(t) dt

x 2ημt 2dt

lim .



x 0



x 0 g(t) dt x 5

0x

### Μονάδες 7

**Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
2. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
5. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

### KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008**

### ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

**ΘΕΜΑ 1o**

**A.1** Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) = ln



x

παραγωγίσιμη στο \* και ισχύει:

, x \* είναι

image127ln 1



x



x

### Μονάδες 10

**Α.2** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

### Μονάδες 5

**B.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν μια συνάρτηση f:A είναι 11, τότε για την



f

αντίστροφη συνάρτηση 1 ισχύει:

f 1( f ( x ))  x, x  A και f ( f (1y))  y, y  f ( A )

### Μονάδες 2

**β.** Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

### Μονάδες 2

**γ.** Όταν η διακρίνουσα ∆ της εξίσωσης αz2 +βz+γ=0 με α,β,γ και α≠0 είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο των μιγαδικών.



### Μονάδες 2

**δ.** Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ’ ανάγκη θα ισχύει

f΄΄( x ) > 0

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

### Μονάδες 2

**ε.** Aν η f είναι συνεχής σε διάστημα ∆ και α,β,γ ∆ τότε ισχύει

β f(x)dx  γf(x)dx  βf(x)dx

### ΘΕΜΑ 2ο

α α γ

### Μονάδες 2

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν



(i 2 2)z

6 και

w (1 i)

w (3 3i)

τότε να βρείτε:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **α.** | το | γεωμετρικό | τόπο | των | εικόνων | των | μιγαδικών |
|  | αριθ | μών z . |  |  |  |  | **Μονάδες 6** |
| **β.** | το | γεωμετρικό | τόπο | των | εικόνων | των | μιγαδικών |

αριθμών w .

**γ.** την ελάχιστη τιμή του



w

**δ.** την ελάχιστη τιμή του



z w

### Μονάδες 7

**Μονάδες 6**

### Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 3ο**

∆ίνεται η συνάρτηση f(x) 



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| x lnx , | x | 0 |
| 0 , | x | 0 |

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

### Μονάδες 3

**β.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f

και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

### Μονάδες 9

**γ.** Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών

image133α

της εξίσωσης x e x για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

### Μονάδες 6

**δ.** Να αποδείξετε ότι ισχύει

για κάθε x > 0 .

### ΘΕΜΑ 4ο

f΄(x+1)>f(x+1) f(x) ,

### Μονάδες 7

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο για την οποία ισχύει

0

f(x) (10x 3

**α.** Να αποδείξετε ότι

3x) 

2f(t)dt 45

f(x)=20x3+6x  45

### Μονάδες 8

**β.** ∆ίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές

παραγωγίσιμη στο . Να αποδείξετε ότι

(

g

g x)  lim

(



h 0

g x) (x  h) h

### Μονάδες 4

**γ.** Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

lim f(x)  45



g(x h) 2g(x) g(x h)

h 0 h2

και g(0)=g΄(0)=1, τότε

1. να αποδείξετε ότι g(x)=x5+x3+x+1
2. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 11

### Μονάδες 10

**Μονάδες 3**

### Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
2. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
5. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30΄ πρωινή.

### KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ**

### ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑ∆Α Β΄) ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

### ΘΕΜΑ 1o

**Α.** Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα ∆. Αν η f είναι συνεχής στο ∆ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του ∆ ισχύει f x) 0, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή

(

σε όλο το διάστημα ∆.

### Μονάδες 10

**Β.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x0 του πεδίου ορισμού της;

### Μονάδες 5

**Γ.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α.** Αν z1, z2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει



z1z2 z 1 z 2

### Μονάδες 2

**β.** Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο x0 ∈A, όταν f(x)≥f(x0 ) για κάθε x∈A

### Μονάδες 2

**γ.** lim x 1 1

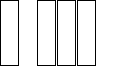


x 0 x

### Μονάδες 2

**δ.** Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

### Μονάδες 2

**ε.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε x∈[α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα

x x ί



( )  f (x)dx

### Μονάδες 2

**ΘΕΜΑ 2ο**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς

z=(2λ+1)+(2λ 1)i , λ∈

**Α.α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του λ∈

### Μονάδες 9

**β.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός z0 1 i έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.



### Μονάδες 8

**Β.** Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

2 w 12 z 0



w



όπου z0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

### Μονάδες 8

**ΘΕΜΑ 3ο**

∆ίνεται η συνάρτηση

f (x)



x



ό

0



1

 ln(x 1),

x 1,

1. Αν ισχύει f (x) 1 για κάθε x 1, να αποδείξετε ότι α=e

### Μονάδες 8

**Β.** Για α=e,

**α.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

### Μονάδες 5

**β.** να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα ( 1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [0,



)

**γ.** αν β, γ ∈ (1, 0)  (0,

### Μονάδες 6

, να αποδείξετε ότι η εξίσωση



)

0

f



f( ) 1

x 1

( ) 1

x 2

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2)

### Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ 4ο**

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα [0, 2] για την οποία ισχύει

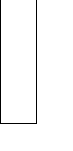
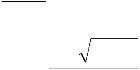
2

0

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

t  2 f (t)dt  0

H(x) 



H(x)

x

6 lim 1

t 0

f (t)dt 3,

0

1 t2

t2

,

G(x) 

t f (t)dt, x [0, 2],

0

x

x

x  (0, 2]

x  0

**α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2].

### Μονάδες 5

**β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ότι ισχύει

G (x)

H(x) , 0 x 2

image147x2

### Μονάδες 6

**γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός α∈(0, 2) τέτοιος ώστε να ισχύει Η(α)=0.

### Μονάδες 7

**δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός ξ∈(0, α) τέτοιος ώστε να ισχύει

 f (t)dt 2



t

0

f (t)dt



0

### Μονάδες 7

**Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

* 1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
  2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

* 1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
  2. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
  3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
  4. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
  5. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

### KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑ∆ΙΚΕΣ**

### ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑ∆Α Β΄) ΤΕΤΑΡΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2010

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα ∆. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο ∆, τότε να αποδείξετε ότι:

 όλες οι συναρτήσεις της μορφής

G(x)=F(x)+c, c∈

είναι παράγουσες της f στο ∆ και

 κάθε άλλη παράγουσα G της f στο ∆ παίρνει τη μορφή

G(x)=F(x)+c, c∈

### Μονάδες 6

**A2.** Πότε η ευθεία x=x0 λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

**Μονάδες 4 A3.** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα ∆ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του ∆. Πότε λέμε ότι η f

στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο ∆;

**Μονάδες 5 Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

**α)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**β)** Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα ∆ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του ∆. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο ∆, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του ∆.

**γ)** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β),

όπου A  lim f ( x) και B  lim f ( x)

x α x β

**δ)** (συνx)΄=ημx, x∈

**ε)** Αν lim f (x)  0 , τότε f(x)<0 κοντά στο x0

x x 0

### Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

∆ίνεται η εξίσωση z 2



z

2 όπου z∈C με z0

**B1.** Να βρείτε τις ρίζες z1

**B2.** Να αποδείξετε ότι

και z2

της εξίσωσης.

### Μονάδες 7

z2010 z

1

2010

2

0

### Μονάδες 6

**B3.** Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει



w 4 3i z1 z2

τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w

στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 7 B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να



αποδείξετε ότι 3 w 7

### Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Γ**

∆ίνεται η συνάρτηση f(x)=2x+ln(x2+1), x∈

**Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

### Μονάδες 5

**Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

2 x2  3x  2 ln



 (3x 2)2 1

**Μονάδες 7 Γ3.** Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία



x4

1

καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ.

### Μονάδες 6

**Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

1



I  xf (x)dx

1

### Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ ∆**

∆ίνεται η συνεχής συνάρτηση f: η οποία για κάθε x∈



ικανοποιεί τις σχέσεις:

f(x) x

f(x)–x =3+ dt



x

t

f (t) t

0

**∆1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο με παράγωγο

f΄(x)= , x∈



f (x)

f (x) x

### Μονάδες 5

**∆2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x)= f (x)2 –2xf(x), x∈ , είναι σταθερή.

### Μονάδες 7

**∆3.** Να αποδείξετε ότι

f(x)=x+



x2

9

**∆4.** Να αποδείξετε ότι

, x∈

### Μονάδες 6

x x 2



1

f



(t)dt  f (t)dt , για κάθε x∈

x x 1

### Μονάδες 7

**Ο∆ΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**

Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

1. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
2. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνον ανεξίτηλης μελάνης**.
3. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
4. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
5. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

### KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑ∆Α Β΄)**

### ∆ΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα ∆ και

x0 ένα εσωτερικό σημείο του ∆. Αν η f παρουσιάζει

τοπικό ακρότατο στο x0 και είναι παραγωγίσιμη στο

σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: f (x0) = 0

### Μονάδες 10

**A2.** ∆ίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο . Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο ;

**Μονάδες 5 A3.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

**α)** Για κάθε μιγαδικό αριθμό z  0 ορίζουμε z0 =1

**β)** Μια συνάρτηση f:A λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν



για οποιαδήποτε x1, x2

A ισχύει η συνεπαγωγή:

αν x1 x

2, τότε f(x

1)  f(x )2

**γ)** Για κάθε x =1



–{x συνx=0} ισχύει: (εφx)

1

image161συν2x



**δ)** Ισχύει ότι: lim 1



x

x x

**ε)** Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων

f και f–1 είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x

που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

### Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με z  3i , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

# z 3i 3i 2 και w z 3i

z



1

z 3i



**B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

**Μονάδες 7**

**B2.** Να αποδείξετε ότι 3i 

z



1

z 3i



**Μονάδες 4 B3.** Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και

ότι 2 w 2

**B4.** Να αποδείξετε ότι:



z w

z

### Μονάδες 8

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

∆ίνεται η συνάρτηση f : , δύο φορές παραγωγίσιμη στο



, με f 0 f (0) 0 , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

ex f  x)  f x) 1 f (   xf (x

(

(

)

x)



για κάθε x .



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι: f (x)  ln(ex  x), x



### Μονάδες 8

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

### Μονάδες 3

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

### Μονάδες 7

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ln(ex  x) = συνx έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα 0,



2



### Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ ∆**

∆ίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g : , οι οποίες για κάθε x ικανοποιούν τις σχέσεις:



1. f(x)>0 και g(x)>0



1 f (x)

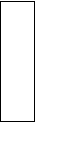
e2x

x e2t

g(x t)

1. dt

0



1 g(x) e2x

x

e2t

f (x t)

1. dt

0

**∆1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο και ότι f(x) = g(x) για κάθε x .



### Μονάδες 9

**∆2.** Να αποδείξετε ότι:

f(x) = ex, x

### Μονάδες 4

**∆3.** Να υπολογίσετε το όριο: xlim0

lnf (x)

### Μονάδες 5



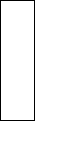
f 1

x

**∆4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που

περικλείεται συνάρτησης

από τη γραφική παράσταση της

x

F(x)  f (t

1

1. dt

τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x=1.

### Μονάδες 7

**Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

* 1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
  2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **∆εν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
  3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
  4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
  5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
  6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
  7. ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
  8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π. μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

### ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑ∆Α Β΄)

**∆ΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012**

### ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙ∆ΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα ∆. Αν f′(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του

∆, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το ∆

**Μονάδες 7 A2.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα

κλειστό διάστημα [α, β];

**Μονάδες 4 A3.** Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η

f παρουσιάζει στο x0œA τοπικό μέγιστο;

**Μονάδες 4 A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι*

*λανθασμένη.*

**α)** Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

**β)** Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

**γ)** Αν είναι lim f(x) **=** +∞, τότε f( x) <0 κοντά στο x0

x→x0

**δ)** (σφx)′ =

1

image176ημ2x

, xœ −{x|ημx=0}

β β

∫

∫

**ε)** f(x)g′(x)dx = [f(x)g(x)]β + f′(x)g(x)dx, όπου f′,g′

α

α α

είναι

συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

### Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

image177z +12 = 4



z\_1 2 + w\_5 w

=12

(1)

(2)

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

### Μονάδες 6

**B2.** Αν z 1, z 2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς



z1\_z2 = 2

αριθμούς z με

τότε, να βρείτε το

.

### Μονάδες 7



z1 + z2

**B3.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη

με εξίσωση

x2 y2

image1819 + 4

= 1 και στη συνέχεια να βρείτε τη

μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του



w

### Μονάδες 6

**B4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς z,w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

1§ §4



z − w

### Μονάδες 6

**ΘΕΜΑ Γ**

∆ίνεται η συνάρτηση f(x)=(x−1)lnx−1, x>0

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα ∆1=(0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα ∆2=[1,+∞). Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

### Μονάδες 6

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση xx-1 = e2013, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

### Μονάδες 6

**Γ3.** Αν x 1, x 2 με x 1<x2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης του

ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει x 0œ( x1 , x2 )

τέτοιο, ώστε

f′(x0 ) + f(x0 ) = 2012

### Μονάδες 6

**Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=f(x)+1 με x>0 , τον άξονα x′x και την ευθεία x=e

### Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ ∆**

Έστω η συνεχής συνάρτηση f : ( 0 , +∞) → , η οποία για κάθε

x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

* f(x) ∫ 0

x2 −x+1

x − x2

* image185∫ f(t)dt ≥ e

1

⎛ x



lnt − t

f(t)

⎞

dt + e⎟ f(x)

⎟

⎠⋅

∫

* ln x−x = − ⎜

⎜

𝗁 1

**∆1.** Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

### Μονάδες 10

Αν είναι f(x) = e−x( lnx −x), x>0, τότε:

**∆2.** Να υπολογίσετε το όριο: lim

⎢

+

𝖥(f(x))2 ημ

1

image188f(x)

− f(x)⎤

⎥

x→0

⎣ ⎦

### Μονάδες 5

**∆3.** Με τη βοήθεια της ανισότητας ln x≤x−1, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι ησυνάρτηση

x

F(x) = ∫

f(t) dt, x>0,

α

όπου α>0, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

F(x) + F(3x) > 2F(2x), για κάθε x>0 (μονάδες 4).

### Μονάδες 6

**∆4.** ∆ίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξœ(β,2β) τέτοιο ώστε:

F(β) + F(3β) = 2F(ξ)

**Ο∆ΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

### Μονάδες 4

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά ( ημερομηνία,

εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.

1. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **∆εν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
2. **.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
3. **.** Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
4. **.** Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
5. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. **.** ∆ιάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

1. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π. μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα

[α, β]. Αν G είναι

μια παράγουσα της f στο [α, β ], τότε να αποδείξετε ότι:

β

∫α f (t) dt = G(β) − G(α)

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ. Τ.)

Μονάδες 4 A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό

διάστημα

[α, β ] του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση

= ρ, ρ>0 παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το

σημείο K(z0 )



z − z0

και ακτίνα

2

ρ , όπου z, z0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν lim f (x ) < 0 , τότε f (x ) < 0 κοντά στο x 0 x→x0

γ) Ισχύει ότι:



ημx ≤ x

για κάθε x ∈

συν x − 1

image192δ) Ισχύει ότι: lim = 1

x→0 x

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

(z − 2 )(z − 2 ) + = 2



z − 2

B1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z ,

είναι κύκλος με κέντρο K(2,0 )

και ακτίνα ρ = 1

(μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω



z

γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι ≤ 3

1 2

(μονάδες 3)

Μονάδες 8

B2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z , z που2 ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό

τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης w + βw + γ = 0 , με w μιγαδικό αριθμό,

β,γ ∈ , και

= 2



Im (z1) − Im (z )

τότε να αποδείξετε ότι:

2

β = − 4 και γ = 5

Μονάδες 9

B3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α0 , α1, α2

οι οποίοι ανήκουν στον

γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1. Αν ο μιγαδικός αριθμός v

ικανοποιεί τη σχέση:

v3 + α2v 2 + α1v + α = 0

0

τότε να αποδείξετε ότι:

< 4



v

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f,g : → , με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

* (f( x) + x) ( ′f( x)
* ( )

f 0 = 1 3 κα ι3

+ )1 = x , για κάθε x ∈

* image198g(x) = x +

x2 − 1

2

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

## ( ) ,



2

f x = x + 1 − x x ∈

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

( ( ))

f g x = 1

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x

0

0 ∈ ⎜ 0,

𝗁

⎛

π ⎞

image201⎟τέτοιο, ώστε:

4

⎠

image203∫ f (t) dt = f ⎛x − π ⎞εφx0

image202

𝗁

x − π

0

4

⎜ 0 4 ⎟⎠

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω f : (0, + ∞) → μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

* ′ ( + ∞)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο 0,

## ( )

f 1 = 1

f (1+ 5h ) − f (1− h )

* image204lim = 0

h→0 h

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

image205x

∫

## ( )

g x = α

Να αποδείξετε ότι:

f (t) − 1 dt, t − 1

x ∈ (1, + ∞)

και α > 1

Δ1. f′ (1) = 0 (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο

x0 = 1 (μονάδες 2).

Μονάδες 6 Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την

ανίσωση στο 

8 x 6 2x

∫ g(u) du > ∫

6 g(u) du (μονάδες 6)

8 x 5

4+5

2x

Μονάδες 9

image207Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση x

∫

(α − 1)

α

f (t) − 1 dt = (f( α) − 1) ( x − α), x > 1 t − 1

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)

1. . Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. . Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. . Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. . Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. . Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. . Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π. μ.

KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 IOYNIOY 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

* η f είναι συνεχής στο Δ και
* f′(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8 A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη

στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4 A3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f

παρουσιάζει στο x0 ∈ Α (ολικό) μέγιστο, το f

(x 0 );

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε z ∈ ^ ισχύει z − z = 2Im(z)

β) Αν lim f (x) = +∞

x→x0

ή −∞ , τότε lim

x→x0

1 = 0

image209( )

f x

(μονάδες 2)

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ( ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ,

τότε ισχύει

β

∫

α f(x)dx =

∫ γ f(x) dx +

α

∫ f(x) dx

γ

β

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

image2112 z 2 + (z + z)i − 4 − 2i = 0, z ∈ ^

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

B1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Μονάδες | | | | 9 |
| B2. | Αν z1=1+i  αποδείξετε | και z 2 =1- i είναι οι ρίζες της παραπάνω ότι ο αριθμός | εξίσωσης, τότε να | |

z 39

image212w = 3 ⎛ 1 ⎞

είναι ίσος με −3i

⎜z ⎟

𝗁 2

⎠

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει



u + w = 4z 1 − z 2 − i

όπου w, z1 , z2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση h(x) = x − An(

ex + 1), x ∈ R

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

Μονάδες 5

eh(2h ′(x))

< e e + 1

image215, x ∈ \

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο

+∞ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο −∞ .

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση φ(x) =

e

x

(

h(x)

+An2),

x ∈ \

Μονάδες 6

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), τον άξονα x ' x και την ευθεία x = 1

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

⎧ex

image216⎪

⎨

− 1 , αν x ≠ 0

Δίνεται η συνάρτηση

f (x) = ⎪ x

⎪ 1

⎪

𝗅

, αν x = 0

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο x0 = 0 και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

2 ′

∫

f (x) f(u) du = 0

1

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η x = 0 (μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή t = 0 από ένα σημείο

A(x0,f(x ))

0

με x0 < 0 και κινείται κατά μήκος της καμπύλης

y = f(x), x ≥ x0 με x = x(t), y = y(t), t ≥ 0 . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί

ότι x '(t) > 0 για κάθε t ≥ 0 .

(μονάδες 4)

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

g(x) = (x f(x) + 1−

e)2 (x − 2 )2 , x ∈ (0, +

∞)

Μονάδες 11

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)

1. . Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. . Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. . Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. . Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. . Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

1. . Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π. μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ**

**ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΔΕΚΥΑΤΙ ΕΡΠΑΑΛ25(ΟΜΜΑΑΪΟΔΑΥ 2Β0΄1)5 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν

image219η f είναι συνεχής στο [α,β] και

image220f(α) image221

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β)

υπάρχει ένας τουλάχιστον x0 image222 τέτοιος ώστε f(x0) image223**η**.

**Μονάδες 7 A2.** Έστω μια συνάρτηση f και x0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε

θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x0 ;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A3.** | **Μονάδες**  Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η | **4**  f |
|  | παρουσιάζει στο x0 image224 τοπικό ελάχιστο; |  |
|  | **Μονάδες** | **4** |

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Αν για δύο συναρτήσεις f , g ορίζονται οι συναρτήσεις

fog

και o

image228image227τότε ισχύει πάντοτε ότι fog = gof.

g f,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **β)** | Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών α image225 | και |
| **γ)** | γ image226 είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.  Για κάθε x ισχύει ότι (συν x) |  |

image232**δ)** Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν ισχύει ότι f(x) image230 για κάθε x image231 και η συνάρτηση f δεν είναι παντού

μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε



**ε)** Αν

lim f(x)

και

f(x)

κοντά στο x ,

lim 1

image235image234image233x 0 0

τότε x

f(x)

0

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

image239| z

**Μονάδες 10**

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=2.

2z 2z

**Μονάδες 7**

**B2.** Έστω w όπου z , z δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος



z2

z1

1 2

Β1.

Να αποδείξετε ότι:

image241α) Ο w είναι πραγματικός και β) - 4

(μονάδες 4)

(μονάδες 7)

**Μονάδες 11**

**B3.** Αν w image242 , όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z1, z2 και να

αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες

A(z1), B(z 2 ), Γ(z3 )

των μιγαδικών αριθμών z1 , z2

και z ,

3

με z image243

3

είναι ισοσκελές.

1

**Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

f(x) .

image246**Γ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (0, .



e x

x2

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

2

)

image247f (e3 e

5

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι

)



4 x

image249για κάθε x **.**

**Μονάδες 8**

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση



, x

g(x)

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο [0, image251 .

**Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

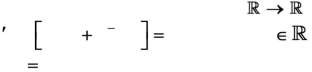
Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :

image253f για κάθε x

image254f(0)



)

, x

.

για την οποία ισχύουν: και

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι

f(x)

**Μονάδες 5**

**Δ2. α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

image257**β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία y και τις ευθείες

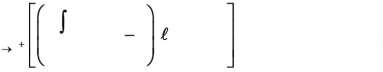
x image258 και x image259 .

**Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

x



lim

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:



1

x

x

x

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. **. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. **.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή

**μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

1. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
2. **.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των

φωτοαντιγράφων.

1. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10. 00 π. μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΤΕΤΑΡΤΗ **18** ΜΑΪΟΥ **2016**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ( ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ **(3)**

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x**0** , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν f′(x) > 0 στο (α, x**0** ) και ′ <

το f(x**0** ) είναι τοπικό μέγιστο fτ(ηxς) 0

f

.

στο

(x**0** ,β), τότε να αποδείξετε ότι

Μονάδες 7

**A2.** Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες **4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες **4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση*,* τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f :[α,β] → , αν G είναι μια

β

∫

παράγουσα της f στο [α,β], τότε το f(t)dt = G(α) − G(β).

α

β) Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x**0** και ισχύει f(x) ≤ g(x)

κοντά στο x , τότε lim f(x) ≤ lim g(x) .

**0 x**→**x**

γ) Κάθε συνάρτηση f ,

**x**→**x**

0 ′ =

0

x ∈ (α,x ) 𝖴 (x ,β), είναιγσιαταθτεηρνή

οσπτο ί α(α,xι σ χ) ύ𝖴ει(x ,fβ()x. ) 0 για κάθε

**0 0 0 0**

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του

συνόλου τιμών της, η εξίσωση y

προς x .

= f(x) έχει ακριβώς μια λύση ως

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] , τότε η f [α, β]

παίρνει στο μια

μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

ΘΕΜΑ Β

x**2** ,

image264

Μονάδες **10**

Δίνεται η συνάρτηση f(x) =

x**2** + 1

x ∈ .

**B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

Μονάδες **6**

**B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες **9**

Μονάδες **7**

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

Μονάδες **3**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση e **x2**

− x**2** − 1 = 0 , x ∈ .

Μονάδες **4**

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f : → που ικανοποιούν την

**2**

σχέση f**2** (x) = (e **x2**

απάντησή σας.

− x**2** − 1)

για κάθε x ∈ και να αιτιολογήσετε την

Μονάδες **8**

**2**

**x2**

Γ**3.** Αν f(x) = e

− x − 1, x ∈ , να αποδειχθεί ότι η

f είναι κυρτή.

Μονάδες **4**

Γ**4.** Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3, να λυθεί η εξίσωση:

f(|ημx | + 3) − f(|ημx| ) = f(x +3) −f(x)

όταν x ∈ [0,+∞).

Μονάδες **9**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο μ, ε συνεχή

δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

π

∫

* (f(x)+f′′(x))ημx dx = π

**0**

* image266f( ) = και lim f(x) = 1

**x**→**0** ημx

* e**f(x)** + x = f (f(x) )+ e **x** για κάθε x ∈ .

Δ1. Να δείξετε ότι f(π) = π (μονάδες 4) και f′(0) = 1 (μονάδες 3).

Μονάδες **7**

Δ2. α) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο . (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο . (μονάδες 2)

Μονάδες **6**

ημx + συν x

image267Δ**3.** Να βρείτε το lim . Μονάδες **6**

**x**→**+**∞

f(x)

**e**πf(lnx)

∫

Δ**4.** Να δείξετε ότι 0 <

dx < π **2** .

image268**1** x

Μονάδες **6**

ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)

1. **.** Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω **-** πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. **.** Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο γ ια πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. **.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π. μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ **K** ΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ**

**ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΠΑΑΘΡΗΑΜΣΚΑΕ: ΜΥΗΑΘ9 ΗΙΟΜΥΑΝΤΙΟΙΥΚ2Α017 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

image270**A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν

f σε κάθε εσωτερικό σημείο είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f

**Μονάδες 7**

**«** Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x0 , είναι

παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό. **»**

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

image271**α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f :

και g :

, αν

image273image272lim f(x) και lim g(x) τότε lim [f(x) .



,

x

**β)** Αν

0

f, g

x x

image276είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού

A, B

αντίστοιχα,

τότε η gimage275

ορίζεται αν

f(A) .

image277**γ)** Για κάθε συνάρτηση f :

που είναι παραγωγίσιμη και δεν

παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει f για κάθε ximage278.

image279**δ)** Αν 0

, τότε

lim .

image280x

**ε)** Η εικόνα f( image281 ενός διαστήματος image282 μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

**Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

image284Δίνονται οι συναρτήσεις f(x) g(x) x .



1

και

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f image286 .

image287**B2.** Αν h(x)

**Μονάδες 5**

, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 6**

**B3.** Αν φ(x) , να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς



e x

e x

τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

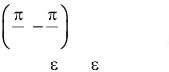
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

**Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

f(x)

image289, και το σημείο A .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες

( 1 2

της

γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

**Γ2.** Αν (



1

και (

2



1

**Μονάδες 8**

image292είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**,

τότε να σχεδιάσετε τις (



E

1

E2

8

, όπου:

αποδείξετε ότι

2 και τη γραφική παράσταση της

f

και να

,

image296E1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

image297παράσταση της f και τις ευθείες (

1

, και

2

image298E2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x ' x .

f(x)



**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο lim .

x f(x)

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι .



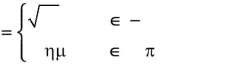
e

1

**Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f(x)



x

image304**Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [

βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

και να

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα,

και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με g(x) image305,

τον άξονα y ' y και την ευθεία x image306 .

6 e



3 f(x)

4

.

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Να λύσετε την εξίσωση 1

**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)**

1. **. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. **.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** γ ια πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. **.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10. 00 π. μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ**

**ΕΠΙΤΥΧΤΕΙΑΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ**

**ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΔΘΕΥΗΤΜΕΑΡ:ΑΜ1Α1ΘΙΟΗΥΜΝΑΙΟΤΥΙΚ20Α18 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

**«** Κάθε συνάρτηση μονότονη. **»**

f : image309 που είναι “1-1” είναι και γνησίως

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο

τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 4**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Η συνάρτηση f(x) x με x έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.



**β)** Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ , η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει f (x) 0 για κάθε x Δ .

1 x



**γ)** Ισχύει lim 0 .

x 0 x

**δ)** Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές

παραστάσεις

C και C

των συναρτήσεων

f και

f 1 αντίστοιχα είναι

συμμετρικές ως προς την ευθεία y x .

**ε)** Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

**Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β



4

x2

Δίνεται η συνάρτηση f(x) x , x .



**B1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

**Μονάδες 8**

**B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 4**

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

**Μονάδες 6**

**B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που**

**δσεβήνει.**)

**Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι



π 4 x2

64x

256,

16π

E(x)

x (0,8).

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m2 .

**Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f(x) e **x-α** x2, x με α 1.

2



**Δ1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του

α 1 η γραφική παράσταση της

συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

**Μονάδες 3**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά

x1, x2

με x1 x

η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x , τέτοια ώστε



21 και τοπικό

ελάχιστο στο x2 .

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) f(1) είναι αδύνατη στο

**Μονάδες 7**

(α, x2 ) .

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Αν

α 2 να αποδείξετε ότι :

3



32

15

f(x)



x 2

2

dx .

**Μονάδες 9**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)**

1. **. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. **.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** γ ια πίνακες, διαγράμματα κ . λπ.
4. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη ε ίναι αποδεκτή.
5. **.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10. 00 π. μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

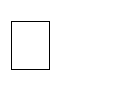
**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ**

**ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΔΘΕΥΗΤΜΕΑΡ:ΑΜ1Α0ΘΙΟΗΥΜΝΑΙΟΤΥΙΚ20Α19 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α



**A1.** Έστω A .

**α)** Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

(Μονάδες 2)

**β) i.** Πότε μια συνάρτηση f : A έχει αντίστροφη;



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | (Μονάδα | 1) |
| **ii.** | Αν | ισχύουν | οι | προϋποθέσεις | του | **(i),** πώς | ορίζεται | η |

αντίστροφη συνάρτηση της f ;

(Μονάδες 3)

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης.

**Μονάδες 4**

**A3.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

Αν f (x) 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f

είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

**Μονάδες 5**

**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.* ***Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.***

**α)** Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο

A ( , 0) (0, με

(x



)

είναι σταθερή στο A .

f ) 0

για κάθε x

, ισχύει ότι η

f

A

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**β)** Για κάθε συνάρτηση

f : A

, όταν υπάρχει το όριο της f

το x τείνει στο xo A , τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμήκταηθςώςf



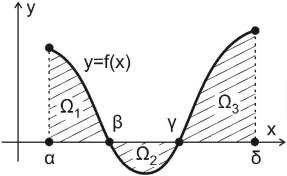
στο

xo .

(Μονάδα 1 για τον χαρακτηρισμό Σωστό/Λάθος

Μονάδες 3 για την αιτιολόγηση)

**Μονάδες 8**

**A5.** Έστω η συνάρτηση f

του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων

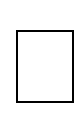
Ω1 , Ω2

και Ω 3

ισχύει ότι

Ε(Ω 1 )=2, Ε( Ω 2 )=1 και Ε( Ω 3 )=3,

τότε το f(x)dx είναι ίσο με:



**α)** 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

*Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

**Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

f : με τύπο

image326έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο την ευθεfί(αx)y .

e 2x



, όπου , η οποία

**B1.** Να αποδείξετε ότι 2.

**Μονάδες 3**

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) x 0 έχει μοναδική ρίζα, η οποία

βρίσκεται στο διάστημα

(2, 3).

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω f 1(x) x . Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε

2



μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

f 1 στο ίδιο

**Μονάδες 9**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση



x ,

e x 1

f(x)

x 1

x, x 1.

2



**Γ1.** Να αποδείξετε ότι

1 και

.

1

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο τιμών της.

image331 και να βρείτε το

**Μονάδες 4**

**Γ3. i.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) 0 έχει μοναδική ρίζα x

οποία είναι αρνητική. , η

(Μονάδεoς 4)

**ii.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f2 (x) xof(x) 0 είναι αδύνατη στο

(xo, ).

**Γ4.** Ένα σημείο

(Μονάδες 4)

**Μονάδες 8**

M(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης y f(x), x 1

.

Τη χρονική στιγμή t0 κατά την οποία το σημείο M

σημείο A(3,10), ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης

δτιοέυρχεστηαμι είαοπυό τMο

image332είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του

εμβαδού του τριγώνου

O(0, 0).

MOK

τη χρονική στιγμή

t0

, όπου

K(x, 0)

και

**Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

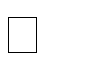
Δίνονται η συνάρτηση

f(

f : image333 με τύπο

image334 x 2) x

όπου , και η ευθεία ( ) : y x 2,x) (x 1)



παράσταση της f στο σημείο της A(1, 1).

η οποία εφάπτεται στη γραφική

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι

1 2 .

και

**Μονάδες 4**

**Δ2.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ( ) και τις ευθείες x 1 και x 2 .

**Μονάδες 5**



**Δ3. i.** Nα αποδείξετε ότι f (x)

1, για κάθεx .

(Μονάδες 3)



**ii.** Nα αποδείξετε ότι f( ) (



1

2

για κάθε .



2) ,

(Μονάδες 5)



1)



3

2

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) x3 x 2, x έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.



**Μονάδες 8**

**ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)**

1. **. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή τ ων απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. **.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** γ ια πίνακες, διαγράμματα κ . λπ.
4. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. **.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10. 00 π. μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑTΘEΗTAΜΡΑΤ:ΗΜ1Α7ΘΙΟΗΥΜΝΑΙΟΤΥΙΚ20Α20**

**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΣΥΜΝΟΥΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

**A1.** Aν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x0, να αποδείξετε ότι

η συνάρτηση

f g είναι παραγωγίσιμη στο x

(f g)

) f (x ) g (xκαι ισχύει

0 0 0



(x

0

).

**Μονάδες 7**

**A2.** Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Α 1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f **;**

**Μονάδες 4**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό *:*

**Μονάδες 4**

« Για κάθε συνάρτηση f με

1

limf(x) 0 ,

x x0

ισχύει ότι

lim

x x0

1

image345ή

f(x)

image346lim .

x x 0 f(x) »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής** , ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής** .

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα ( **α**).

(μονάδα 1)

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A5.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***ΣΩΣΤΟ****, αν η πρόταση είναι* ***σωστή****, ή* ***ΛΑΘΟΣ*** *αν η πρόταση είναι* ***λανθασμένη*** .

α) Αν limf(x) , τότε f(x) 0 για κάθε x κοντά στο

x x 0

x0 .

β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [ α, β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και f΄(x) 0 για κάθε α, β), τότε f(α) f(β).

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο image349 , ισχύει f ΄(x) 0 για κάθε x



**Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

f(x)

3x 1 ,

###### x 3 x



**Β1.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο image353 .

**Μονάδες 5**

**B2.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f 1

**B3.** Να αποδείξετε ότι (f image354 x για κάθε x



είναι ίσες.

**Μονάδες 8**

**Μονάδες 6**

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο

lim x) ημ

x 1

f(



1

3x+1 .

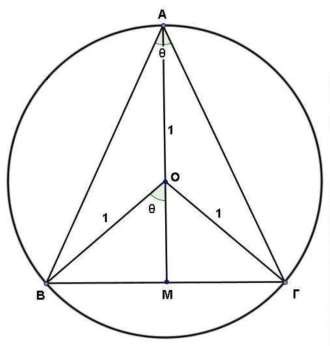


3

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του



ˆ

τριγώνου και

, τότε:

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας είναι:



,



(1

).

E( )

(0,

)

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να βρείτε την τιμή της γωνίας

(0,



)

εμβαδόν ,

για την οποία το του τριγώνου

μεγιστοποιείται.

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες 1 , 2

3

image360τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με .

4

,

, με για

1 2

**Μονάδες 6**

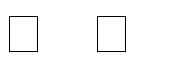
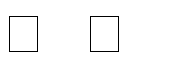
**Γ4.** Για τις γωνίες 1 ,



, του ερωτήματος **Γ3**, να αποδείξετε ότι υπάρχουν

2

τέτοια, ώστε:



3

1

΄( 1 )

2

΄( 2 ).



1 ,

(0, )

2

3

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

f(x) ,



x

g(x) x x , x (0,



).

###### x (0,

(0, )

και

**Μονάδες 6**

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x 1, το



),

οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην(0ο, ποία



ανήκει το σημείο ακρότατου της f , καθώς το μεταβάλλεται στο ) .

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του 0 για την οποία ισχύει

x x x,

για κάθε x>0.

**Μονάδες 5**

**Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε** 1.

**ότι**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία y x είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης Cg της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**Δ4.** Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση h(x)

Να αποδείξετε ότι:

1. H h είναι συνεχής
2. Η εξίσωση

x x, x 0

1 , x 0.





**Μονάδες 6**

(Μονάδες 3)

x2020

2 1

2 g(t)dt (1 x) h(1 t)dt 0



3



1 0

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0, 1).

(Μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**Ο ΔΗ ΓΙΕΣ ( γ ια το υς εξε τα ζο μένο υ ς )**

1. **. Στο εξ ώφυλλο** το υ τε τρ αδίο υ να γρ άψετε το εξεταζό μ ενο μ άθημ α . **Στο εσ ώφυλλο π ά ν ω- πάν ω** να συμ πλη ρώσετε τα ατο μ ικ ά στο ι χεία μ αθητή. **Στην αρχή τ ων απ αντ ήσ ε ών σ ας** να γρ άψετε πάνω - π άνω την ημ ερο μ ηνί α και το εξεταζό μ ενο μ άθημ α. **Να μην αντιγρά ψε τε** τα θέμ ατ α στο τετράδ ιο και **να μη γ ράψ ετ ε** πο υθενά αλ λο ύ στο τετρ άδιό σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση** . Κατά την απο χώρησ ή σας να πα ρα δώσετε μ αζί με το τετρ άδ ιο κ α ι τα φωτο αντίγ ραφ α.
3. **.** Να απαντ ήσετε **σ το τετράδιό σας** σε ό λα τα θέμ ατ α **μό νο** με μ πλε ή **μό νο** με μ αύρο στυλό με μ ελάν ι πο υ δεν σβήνει. Μο λύβι επ ι τ ρέπετ αι, **μό ν ο** αν το ζητάε ι η εκφώνηση, κα ι **μό νο** γ ια π ί νακες, δ ιαγ ρ άμ μ ατ α κ . λπ.
4. **.** Κάθε απάντηση επισ τ ημ ο ν ικά τεκμ η ριωμ ένη ε ί ναι απο δεκ τή.
5. **.** Διάρκεια εξέτασ ης: τ ρ ε ι ς ( 3 ) ώρες μ ετά τη δ ιανο μ ή των φωτο αντ ι γ ράφων.
6. **.** Χρό νο ς δυνατής απο χ ώρησ ης: 1 0 . 0 0 π . μ .

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΤΘΕΗΤΑΜΡΑΤ:ΗΜ1Α7ΘΙΟΗΥΜΝΑΙΟΤΥΙΚ20Α20 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

image369η f είναι συνεχής στο [α, β] και

image370f(α) image371 ,

image373να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει

image372ένας τουλάχιστον xo

τέτοιος, ώστε

f(xo) .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα

[α, β]

του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

image375« Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο image374 ».

**α)** Να, ιχσαχρύαεκι τηf ρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ** , αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

image376**A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** lim , για κάθε v image377 .

x

**β)** Αν

f, g

είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού



.

A και B,

αντίστοιχα, τότε η g image378

ορίζεται, αν

f(A)

**γ)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)



έχει

image381άξονα συμμετρίας τον y .

image383**δ)** Η εικόνα f( image382 ενός διαστήματος μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

image386**ε)** Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο

και ότι η γραφική

της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x . Αν υπάρχει κάποιο

σημείο A(xo, f(xo ))

της C**f**

image387x είναι μέγιστη

, του οποίου η απόσταση από τον άξονα (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η

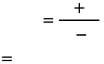
εφαπτομένη της

C**f** είναι οριζόντια.

**Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:



f(x) x x

.

f : (1,

g :



,

image388, με τύπο

με τύπο g(x)

και

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f image391 .

**Μονάδες 5**

**B2.** Αν (f



ex

ex

,

με x image393 f image394

, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

είναι

‘1-1’ και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 8**

**B3.** Αν



, με x

φ ως προς τη μονοτονία.

, να μελετήσετε τη συνάρτηση

**Μονάδες 6**

**B4.** Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

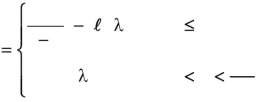
image396lim φ(x) και lim φ(x) **.**

image397x x

**Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση



0

3π

2

image399f(x) , με .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι image400 .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f

image403στο σημείο A(0, 1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x γωνία ίση

π

image404με .

4

**Γ3.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

**Μονάδες 6**

**Μονάδες 6**

image405**Γ4.** Ένα σημείο M( , με , κινείται στη γραφική παράσταση της f .

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο



3

.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα

image407x στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του

σημείου B τη χρονική στιγμή to , κατά την οποία το σημείο έχει

image408τετμημένη .

M

**Μονάδες 8**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

f : image409 με τύπο

###### f(x) image410 .

image411**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό xo , στο οποίο η f

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

f(xo) .



o

o

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο

**Μονάδες 7**

όπου

x

xo το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η



lim

,

f παρουσιάζει ολικό

ελάχιστο**.**

**Μονάδες 6**

image415image414**Δ3.** Αν xo είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f

ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

f(x)

γπια ροxυσιάζει ολέιχκεόι

μοναδική ρίζα ρ **.**

**Μονάδες 5**

**Δ4.** Αν

xo είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η

f παρουσιάζει ολικό

image417ελάχιστο και ρ

είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να

αποδείξετε ότι

f(xo )

για κάθε k **.**

image416**Μονάδες 7**

**ΝΕΟ** ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

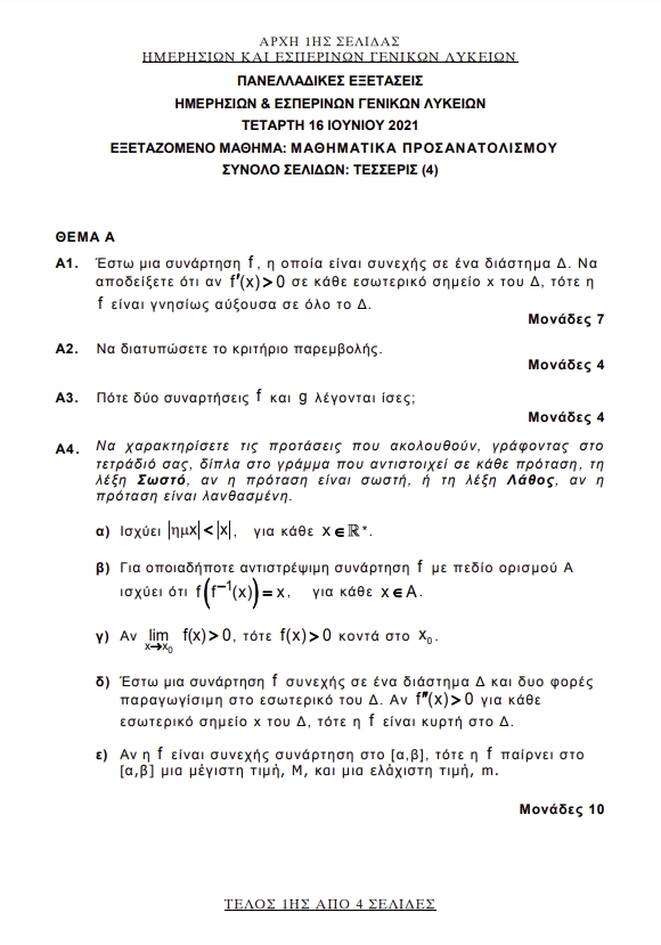
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ – ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

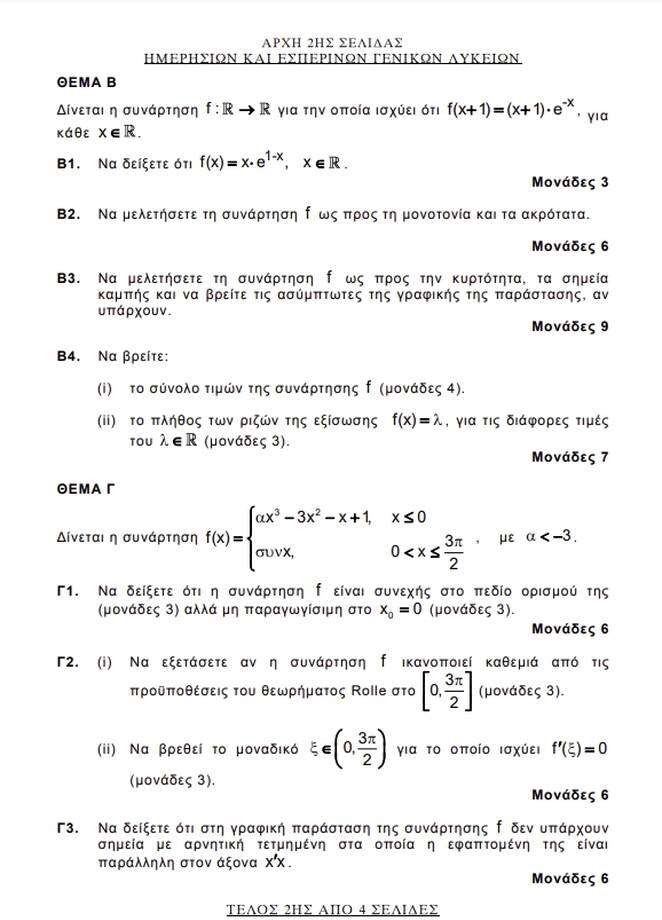
**ΟΔΗΓΙΕΣ ( για τους εξεταζομένους)**

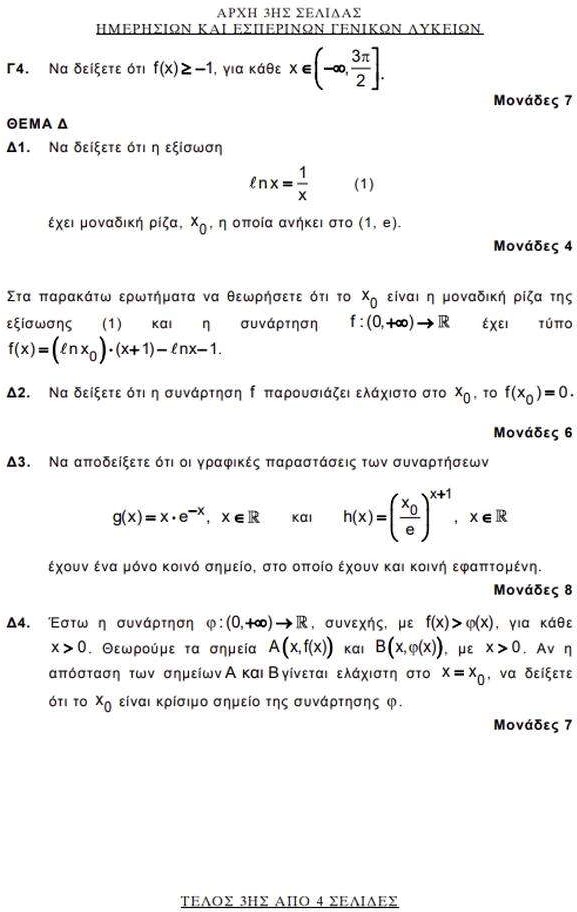
1. **. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. **.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. **.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** γ ια πίνακες, διαγράμματα κ. λπ.
4. **.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. **.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις ( 3 ) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. **.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10. 00 π. μ.

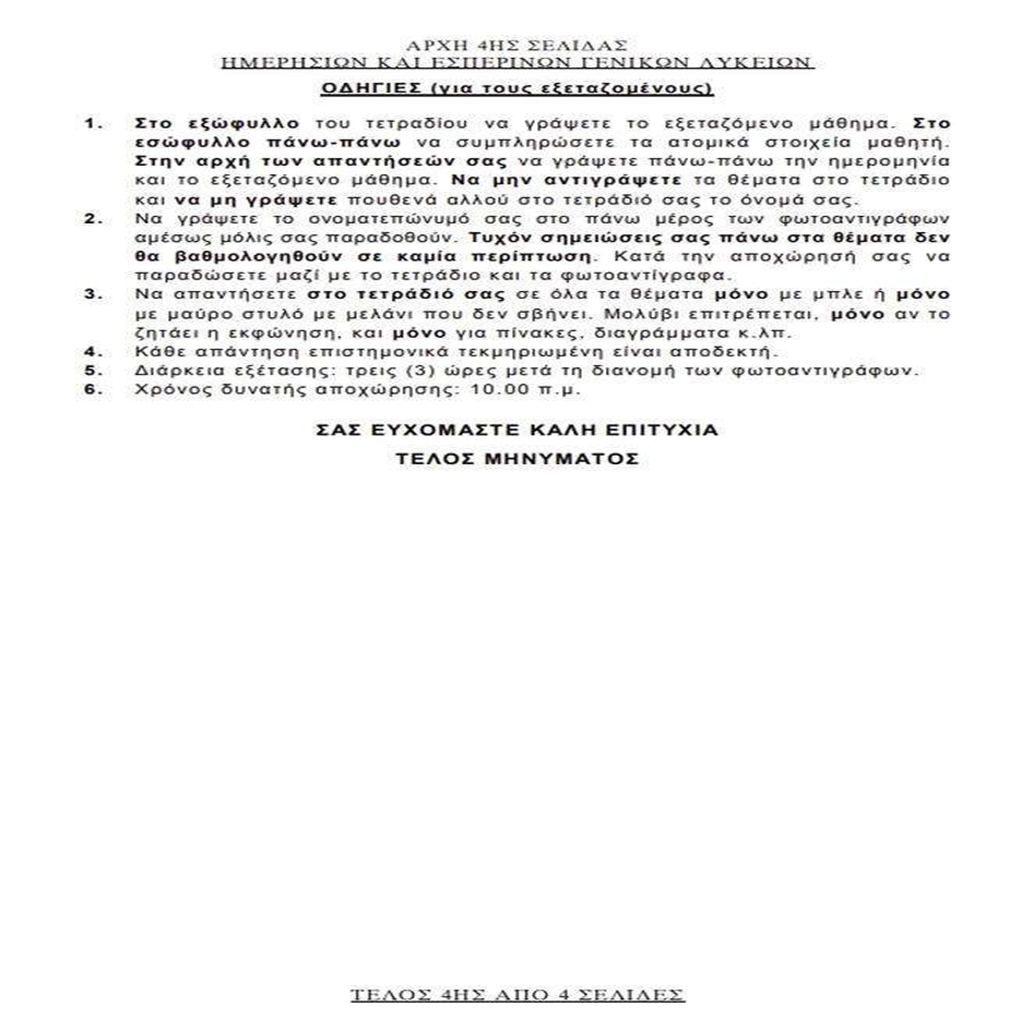
**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**







****

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

**ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

* όλες οι συναρτήσεις της μορφής

G(x)  F(x)  c ,

όπου c  ℝ , είναι παράγουσες της f στο Δ και

* κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

G(x)  F(x)  c ,

με c  ℝ .

**Α2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

**Μονάδες 7**

**Μονάδες 4**

**Α3.** Πότε η ευθεία

x  x0

λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής

παράστασης μιας συνάρτησης f ;

**Μονάδες 4**

**Α 4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό*** *, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη* ***Λάθος*** *, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Αν

0    1 τότε

lim

x 

x  0.

**β)** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] , παραγωγίσιμη στο (0,1)

και f(x)  0, για όλα τα x(0,1) , τότε f(0)  f(1) .

**γ)** Η συνάρτηση

f(x)  x

είναι παραγωγίσιμη στο

R2  ℝ  {x

 x  0}

και ισχύει

f(x) 

1 .

2x

**δ)** Ισχύει ότι

lim 1  x  1.

x 0 x

**ε)** Αν

 f(x) dx  0 , τότε κατ’ ανάγκη θα είναι f(x)  0 , για κάθε

x  [,] .



**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση f : (,1]  ℝ με τύπο

g: [0, )  ℝ με τύπο g(x)  .



x

**Μονάδες 10**

f(x)  x4  2x2  1 και η συνάρτηση

**Β1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h  f ∘ g .

**Μονάδες 6**

**Β2.** Αν h(x)  (x  1)2 , x  [0,1] , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1 1"

( μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h1 της h (μονάδες

6).

**Β3.** Έστω

h1(x)  1

x, x  [0,1] .



h1 (x)

 1 x

, x [0,1)

**Μονάδες 9**

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

(x)  





.

1 , x=1

2

1. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση  ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1] . (μονάδες 6)
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

x0  (0,1)

τέτοιο ώστε

(x )   **,** όπου     

0 6 2

. (μονάδες 4)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

f : ℝ  ℝ , η γραφική παράσταση της οποίας

διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι

παραγωγίσιμη στο ( , 1) ∪ (1,  ) και για την παράγωγο f της f ισχύει ότι:

f(x)  2 , x  1 .

3x2  1 , x  1



2x  2 , x  1

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

f(x)  



.

x3  x , x  1

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της

f σε σημείο (x0,f(x0 )) με

x0  1**,** η οποία τέμνει τον άξονα yy στο 2.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Έστω y  2x  2

η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα

σημείο M(x, y) με x  2

κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα

Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα xx και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική

στιγμή t0

κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο

ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική

στιγμή

t0 .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο

lim

  f(x) 

f(x) 

.

x  

f(x) 1 x3 

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση

 

f : 0,  ℝ με τύπο:

f(x)  x ln(3x)

**Μονάδες 8**

**Δ1. i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)  0

έχει ακριβώς δύο ρίζες

x1, x2 **,** με

x1  1  x2

. ( μονάδες 6)

**ii)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. ( μονάδες 2)

**Μονάδες 8**

Στα παρακάτω ερωτήματα, ερώτημα Δ1.

x1 και x2

είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο

**Δ2.** Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα

xx **,** να αποδείξετε ότι:

E  1 (x  x )(x  x

 2) .

2 2 1 1 2

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι:

f(2  x1)  0 .

**Μονάδες 7**

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να εξετάσετε αν η εξίσωση: 2f(x)  ln3  1 f(x2 )(x  x2 )

έχει λύση.

**Μονάδες 6**

**ΟΔΗΓΙΕ Σ ( γι α του ς εξεταζομένους)**

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω- πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω- πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ. λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π. μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ KΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**